传输线理论

1 引言

传输电磁能量和信号的线路称为传输线。传输线包括TEM 波传输线、波导传输线和表面波传输线。本教材讨论TEM 波传输线（如双线、同轴线）的基本理论。这些理论不仅适用于TEM 波传输线,而且也是研究TEM波传输线的理论基础。

TEM波即横电磁波，其特征是$E_z=0$、$H_z=0$，因此电磁场只有横向分量E_T、H_T，即TEM波只有垂直于传输方向的横向分量。但应注意到TEM波的场不是静场，而是随时间t及纵座标z波动变化的场。

研究传输线上所传输电磁波的特性的方法有两种。一种是“场”的分析方法，即从麦氏方程组出发，解特定边界条件下的电磁场波动方程，求得场量（$\vec{E}$和$\vec{H}$）随时间和空间的变化规律，由此来分析电磁波的传输特性；另一种方法是“路”的分析方法，它将传输线作为分布参数来处理，得到传输线的等效电路，然后由等效电路根据克希霍夫定律导出传输线方程，再解传输线方程，求得线上电压和电流随时间和空间的变化规律，最后由此规律来分析电压和电流的传输特性。这种“路”的分析方法，又称为长线理论。事实上，“场”的理论和“路”的理论既是紧密相关的，又是相互补充的。

1.1 分布参数及其分布参数电路

传输线可分为长线和短线，长线和短线是相对于波长而言的。所谓长线是指传输线的几何长度和线上传输电磁波的波长的比值（即电长度）大于或接近于**1**。反之称为短线。在微波技术中，波长以m或cm计，故1m长度的传输线已长于波长，应视为长线；在电力工程中，即使长度为1000m的传输线，对于频率为50Hz（即波长为6000km）的交流电来说，仍远小于波长，应视为短线。传输线这个名称均指长线传输线。有些传输线宜用“场”的理论去处理，而有些传输线在满足一定条件下可以归结为“路”的问题来处理，这样就可以借用熟知的电路理论和现成方法，使问题的处理大为简化。长线和短线的区别还在于：前者为分布参数电路，而后者是集中参数电路。在低频电路中常常忽略元件连接线的分布参数效应，认为电场能量全部集中在电容器中，而磁场能量全部集中在电感器中，电阻元件是消耗电磁能量的。由这些集中参数元件组成的电路称为集中参数电路。随着频率的提高，电路元件的辐射损耗，导体损耗和介质损耗增加，电路元件的参数也随之变化。当频率提高到其波长和电路的几何尺寸可相比拟时，电场能量和磁场能量的分布空间很难分开，而且连接元件的导线的分布参数已不可忽略，这种电路称为分布参数电路。

下面以对称线为例讨论它的分布参数：

频率提高后，导线中所流过的高频电流会产生趋肤效应，使导线的有效面积减小，高

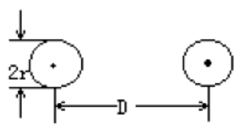
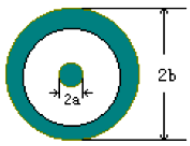
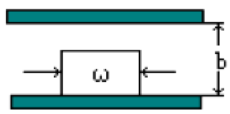
频电阻加大，而且沿线各处都存在损耗，这就是分布电阻效应；通高频电流的导线周围存在高频磁场，这就是分布电感效应；又由于两线间有电压，故两线间存在高频电场，这就是分布电容效应；由于两线间的介质并非理想介质而存在漏电流，这相当于双线间并联一个电导，这就是分布电导效应。当频率提高到微波频段时，这些分布参数不可忽略。例如，设双线的分布电感L_1= 1.0nH/mm，分布电容C_1= 0. 01 pF/mm。当f=50Hz时，引入的串联电抗和并联电纳分别为$X_l=314\times10^{-3}\mu\Omega$ /mm和B_c= 3.14×10^{-12} S / mm。当f=5000MHz时，引入的串联电抗和并联电纳分别为X_l=31.4Ω/mm 和$B_c=3.14\times10^{-4}$S/mm 。

由此可见，微波传输线中的分布参数不可忽略，必须加以考虑。由于传输线的分布参数效应，使传输线上的电压电流不仅是空间位置的函数。

1.2 均匀传输线的分布参数及其等效电路

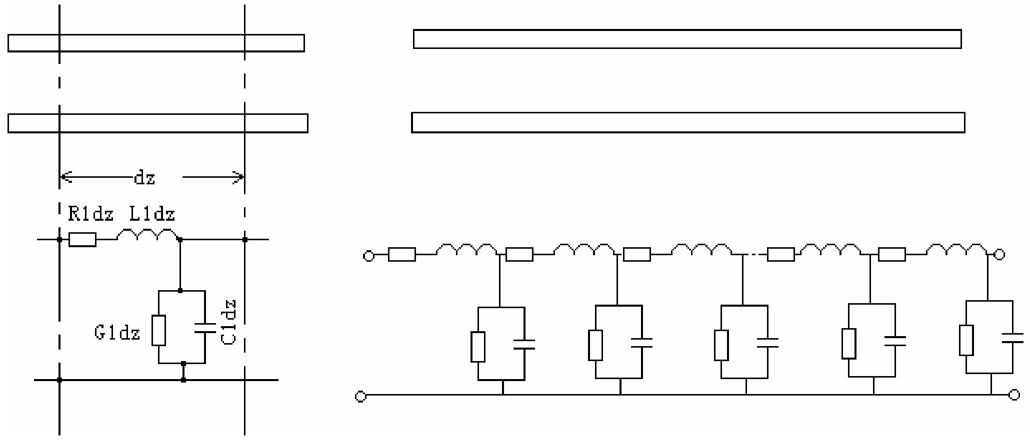
所谓均匀传输线是指传输线的几何尺寸、相对位置、导体材料以及周围媒质特性沿电磁波传输方向不改变的传输线，即沿线的参数是均匀分布的。一般情况下均匀传输线单位长度上有四个分布参数；分布电阻R_1、分布电导G_1、分布电感L_1和分布电容C_1。它们的数值均与传输线的种类、形状、尺寸及导体材料和周围媒质特性有关。几种典型传输线的分布参数计算公式列于表1-1中。表中μ_0、ε分别为对称线周围介质的磁导率和介电常数。

表1-1

种类	对称线	同轴线	带状线
结构			
L_1/（H/m）	$\frac{\mu}{\pi}\ln\frac{D}{r}$	$\frac{\mu}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$	$\frac{\pi\mu}{8\,\mathrm{arche}^{\frac{\pi\varpi}{2b}}}$
C_1/（F/m）	$\frac{\pi\varepsilon}{\ln\frac{D}{r}}$	$\frac{2\pi\varepsilon}{\ln\frac{b}{a}}$	$\frac{8\varepsilon}{\pi}\mathrm{arche}^{\frac{\pi\omega}{2b}}$

表中：ε 为介电常数、μ 为导磁率。$\varepsilon=\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r$、$\mu=\mu_0\cdot\mu_r$，其中 ε_0 真空介电常数、μ_0 为真空导磁率，ε_r、μ_r 分别为相对介电常数和相对导磁率。

有了分布参数的概念，我们可以将均匀传输线分割成许多微分段dz（dz＜＜λ），这样每个微分段可看作集中参数电路。其集中参数分别为R_1dz、G_1dz、L_1dz及C_1dz，其等效电路为一个Γ型网络如图1-1（a）所示。整个传输线的等效电路是无限多的Γ型网络的级联，如图1-1（b）所示。



（a）　（b）

图1-1

2 均匀传输线方程及其解

2.1 均匀传输线方程

均匀传输线的始端接角频率为ω的正弦信号源，终端接负载阻抗 Z_L。坐标的原点选在始端。设距始端z处的复数电压和复数电流分别为 $U(z)$ 和 $I(z)$，经过dz段后电压和电流分别为 $U(z)+dU(z)$ 和 $I(z)+dI(z)$。如图2-1 所示。

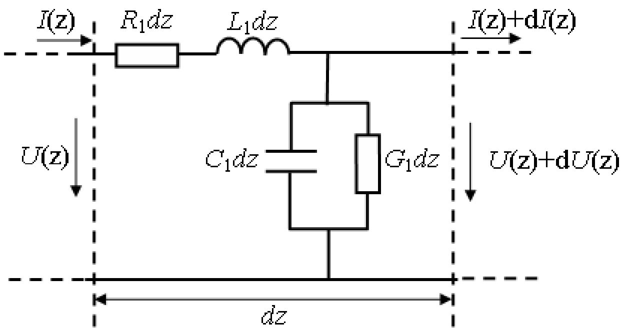


图2-1

其中增量电压 $dU(z)$ 是由于分布电感 L_1dz 和分布电阻 R_1 的分压产生的，而增量电流 $dI(z)$ 是由于分布电容 C_1dz 和分布电导 G_1 的分流产生的。根据克希霍夫定律很容易写出下列方程：

$$\begin{cases} -dU(z)=(R_1+j\omega L_1)I(z)dz \\ -dI(z)=(G_1+j\omega C_1)[U(z)+dU(z)]dz \end{cases} \tag{2-1}$$

略去高阶小量，即得：

$$\begin{cases} \dfrac{dU(z)}{dz} = -\left[R_1 I(z) + j\omega L_1 I(z)\right] \\ \dfrac{dI(z)}{dz} = -\left[G_1 U(z) + j\omega C_1 U(z)\right] \end{cases} \tag{2-2}$$

式（2-2）是一阶常微分方程，亦称传输线方程。它是描写无耗传输线上每个微分段上的电压和电流的变化规律，由此方程可以解出线上任一点的电压和电流以及它们之间的关系。因此式（2-2）即为均匀传输线的基本方程。

2.2 均匀传输线方程的解

将式（2-2）两边对z微分得到：

$$\begin{cases} \dfrac{d^2U(z)}{dz^2} = -\left(R_1 + j\omega L_1\right)\dfrac{dI(z)}{dz} \\ \dfrac{d^2I(z)}{dz^2} = -\left(G_1 + j\omega C_1\right)\dfrac{dU(z)}{dz} \end{cases} \tag{2-3}$$

将式（2-2）代入上式，并改写为

$$\begin{cases} \dfrac{d^2U(z)}{dz^2} = \left(R_1 + j\omega L_1\right)\left(G_1 + j\omega C_1\right)U(z) = \gamma^2 U(z) \\ \dfrac{d^2I(z)}{dz^2} = \left(R_1 + j\omega L_1\right)\left(G_1 + j\omega C_1\right)I(z) = \gamma^2 I(z) \end{cases} \tag{2-4}$$

其中：

$$\gamma = \sqrt{\left(R_1 + j\omega L_1\right)\left(G_1 + j\omega C_1\right)} = \alpha + j\beta 。 \tag{2-5}$$

式（2-4）称为传输线的波动方程。它是二阶齐次线性常系数微分方程，其通解为

$$\begin{cases} U(z) = A_1 e^{-\gamma z} + A_2 e^{\gamma z} \\ I(z) = A_3 e^{-\gamma z} + A_4 e^{\gamma z} \end{cases} \tag{2-6}$$

将式（2-6）第一式代入式（2-2）第一式，便得

$$I(z) = \frac{\gamma}{R_1 + j\omega L_1}\left(A_1 e^{-\gamma z} - A_2 e^{\gamma z}\right) = \frac{1}{Z_0}\left(A_1 e^{-\gamma z} - A_2 e^{\gamma z}\right) \tag{2-7}$$

式中

$$Z_0 = \frac{R_1 + j\omega L_1}{\gamma} = \sqrt{\frac{R_1 + j\omega L_1}{G_1 + j\omega C_1}} \tag{2-8}$$

具有阻抗的单位，称它为传输线的特性阻抗。

通常称γ为传输线上波的传播常数，它是一个无量纲的复数，而Z_0具有电阻的量纲，称为传输线的波阻抗或特性阻抗。

高频时，即 $\omega L_1 >> R_1$，$\omega C_1 >> G_1$，则

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \qquad (2\text{-}9)$$

可近视认为特性阻抗为一纯电阻，仅与传输线的形式、尺寸和介质的参数有关，而与频率无关。

式（2-6）中A_1和A_2为常数，其值决定于传输线的始端和终端边界条件。通常给定传输线的边界条件有两种：一是已知终端电压U_2和电流I_2；二是已知始端电压U_1和电流I_1。下面分别讨论两种情况下沿线电压和电流的表达式。

2.2.1 已知均匀传输线终端电压U_2和终端电流I_2

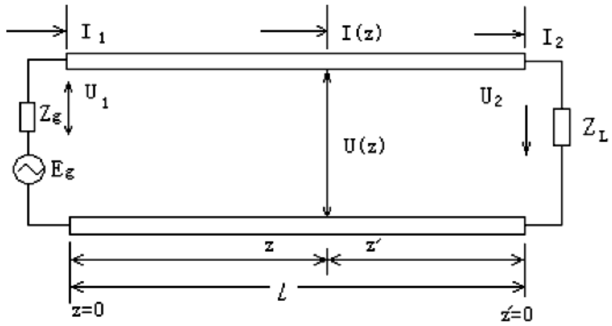


图2-2

如图2-2 所示，这是最常用的情况。只要将$z=l$，$U(l)=U_2$，$I(l)=I_2$代入式（2-6）第一式和（2-7）得

$$\begin{cases} U_2 = A_1 e^{-\gamma l} + A_2 e^{\gamma l} \\ Z_0 I_2 = A_1 e^{-\gamma l} - A_2 e^{\gamma l} \end{cases}$$

解得：

$$\begin{cases} A_1 = \dfrac{1}{2}(U_2 + Z_0 I_2) e^{\gamma l} \\ A_2 = \dfrac{1}{2}(U_2 - Z_0 I_2) e^{-\gamma l} \end{cases} \qquad (2\text{-}10)$$

将上式代入式（2-6）第一式和式（2-7），注意到$l - z = z'$,并整理求得

$$\begin{cases} U(z') = \dfrac{U_2 + Z_0 I_2}{2} e^{\gamma z'} + \dfrac{U_2 - Z_0 I_2}{2} e^{-\gamma z'} = U_i(z') + U_r(z') \\ I(z') = \dfrac{U_2 + Z_0 I_2}{2Z_0} e^{\gamma z'} - \dfrac{U_2 - Z_0 I_2}{2Z_0} e^{-\gamma z'} = I_i(z') + I_r(z') \end{cases} \qquad (2\text{-}11)$$

考虑到$\dfrac{U_2}{I_2} = Z_L$，（2-11）变为：

$$\begin{cases} U(z') = \dfrac{Z_L + Z_0}{2I_2} e^{\gamma z'} + \dfrac{Z_L - Z_0}{2I_2} e^{-\gamma z'} = U_i(z') + U_r(z') \\ I(z') = \dfrac{Z_L + Z_0}{2Z_0 I_2} e^{\gamma z'} - \dfrac{Z_L - Z_0}{2Z_0 I_2} e^{-\gamma z'} = I_i(z') + I_r(z') \end{cases} \tag{2-12}$$

上式可以看出传输线上任意处的电压和电流都可以看成是有两个分量组成，即：入射波分量$U_i(z')$、$I_i(z')$，反射波分量$U_r(z')$、$I_r(z')$。

2.2.2 已知均匀传输线始端电压U_1和始端电流I_1

将$z=0$、U（0）$=U_1$ 、I（0）$=I_1$代入式（2-6）第一式和式（2-7）便可求得

$$\begin{cases} A_1 = \dfrac{1}{2}(U_1 + Z_0 I_1) \\ A_z = \dfrac{1}{2}(U_1 - Z_0 I_1) \end{cases} \tag{2-13}$$

将上式代入式（2-6）和式（2-7），即可得

$$U(z) = \frac{1}{2}(U_1 + Z_0 I_1) e^{-\gamma z} + \frac{1}{2}(U_1 - I_1 Z_0) e^{\gamma z} = U_i(z) + U_r(z) \tag{2-14}$$

$$I(z) = \frac{1}{2Z_0}(U_1 + Z_0 I_1) e^{-\gamma z} - \frac{1}{2Z_0}(U_1 - I_1 Z_0) e^{\gamma z} = I_i(z) + I_r(z) \tag{2-15}$$

2.3 均匀传输线入射波和反射波的叠加

由式（2-6）和式（2-7）两式可以看出，传输线上任意位置的复数电压和电流均有两部分组成，即有

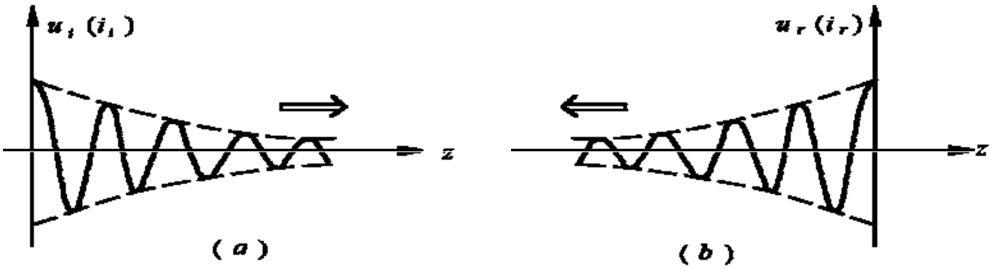
$$\begin{cases} U(z) = A_1 e^{-\gamma z} + A_2 e^{\gamma z} = A_1 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} + A_2 e^{\alpha z} e^{j\beta z} = U_i(z) + U_r(z) \\ I(z) = \dfrac{1}{Z_0} A_1 e^{-\gamma z} - \dfrac{1}{Z_0} A_2 e^{\gamma z} = \dfrac{1}{Z_0} A_1 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} - \dfrac{1}{Z_0} A_2 e^{\alpha z} e^{j\beta z} = I_i(z) + I_r(z) \end{cases} \tag{2-16}$$

根据复数值与瞬时值的关系并假设A_1、A_2为实数，则沿线电压的瞬时值为

$$\mathrm{u(z,t)} = A_1 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) + A_2 e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z) = u_i(z,t) + u_r(z,t) \tag{2-17}$$

$$i(z,t) = \frac{A_1}{Z_0} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) - \frac{A_2}{Z_0} e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z) = i_i(z,t) + i_r(z,t) \tag{2-18}$$

式中u_i（z,t）、i_i（z.t）是由信号源向负载方向传播的行波，称为入射波，其振幅按$e^{-\alpha z}$随传输方向衰减，其相位随传播方向z的增加而滞后；u_r（z,t）和i_r（z,t）是由负载向信号源方向传播的行波，称为反射波，其振幅按$e^{\alpha z}$随反射方向衰减，其相位随z的增加而滞后。线上任意位置的电压和电流均是入射波和反射波的叠加。



（a）$u_i(z,t)$　　　　（b）反射波$u_r(z,t)$

图 2-3 入射波和反射波沿线的瞬时分布图

当$U_2-Z_0I_2$＝0，即负载阻抗 Z_2＝U_2/I_2＝Z_0时，公式（2-10）中的第二项为 A_2=0，此时反射波消失，传输线上只存在入射波。当传输线终端连接与特性阻抗 Z_0匹配的负载时，终端无反射，传输线上只存在入射波，此时传输线上的波称为行波。

现在研究行波状态下电压和电流的沿线变化情况。为讨论方便，距离变量仍然从始端算起，由于$U_2-Z_0I_2$＝0，A_2=0，$U_r(z)$=0。考虑到$\gamma=\alpha+j\beta$，因此公式（2-14）简化为：

$$U(z)=U_i(z)=\frac{U_1+Z_0I_1}{2}e^{-\gamma z}=A_1e^{-\gamma z}=A_1e^{-\alpha}e^{-j\beta z} \qquad (2\text{-}19)$$

$$I(z)=I_i(z)=\frac{U_1+Z_0I_1}{2Z_0}e^{-\gamma z}=\frac{A_1}{Z_0}e^{-\gamma z}=\frac{A_1}{Z_0}\,e^{-\alpha}e^{-j\beta z} \qquad (2\text{-}20)$$

于是入射波电压的瞬时值（假设初始相位φ）可以写为：

$$u_i(z,t)=A_1e^{-\alpha z}\cos(\omega t-\beta z+\varphi) \qquad (2\text{-}21)$$

式（2-18）是距离 z 和时间 t 的函数。在任意指定的地方（即 z 为定值），他随时间按正弦规律变动；而在任意指定时间（即 t 为定值），它沿线以指数规律分布衰减。如图 2-4 所示。

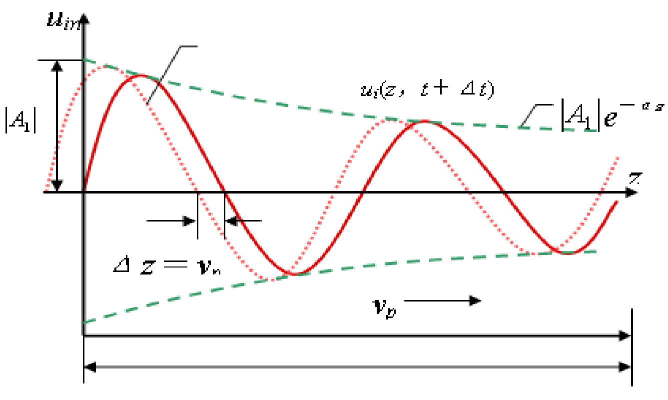


图 2-4　传输线上的电压入射波

2.4　均匀传输线相速与波长

现在我们研究波形上固定相位点的移动情况，令式（2-21）中 $\omega t-\beta z+\varphi=K$，$K$ 为常数。两边对 t 微分得：

$$\omega-\beta\frac{dz}{dt}=0$$

$$v_p=\frac{dz}{dt}=\frac{\omega}{\beta} \qquad (2\text{-}22)$$

式（2-22）为波行进的速度，即相位速度，简称相速。

在一个周期的时间内波所行进的距离称为波长，用 λ 表示，即：

$$\lambda_p=\frac{v_p}{f}=V_pT=\frac{2\pi}{\beta} \qquad (2\text{-}23)$$

式中 f 为电磁波频率，T 为振荡周期。

2.5　均匀传输线特性阻抗

由式（2-6）、（2-7）可见，入射电压与入射电流之比或反射电压与反射电流之比为特性阻抗（即波阻抗）。他的表示式为（2- 8 ），即：

$$Z_0=\sqrt{\frac{R_1+j\omega L_1}{G_1+j\omega C_1}}$$

一般情况下，Z_0 为复数，其摸和幅角分别为：

$$\left.\begin{aligned}|Z_0|&=\sqrt[4]{\frac{{R_1}^2+\omega^2{L_1}^2}{{G_1}^2+\omega^2{C_1}^2}}\\ \varphi_0&=\frac{1}{2}\left(tg^{-1}\frac{\omega L_1}{R_1}-tg^{-1}\frac{\omega C_1}{G_1}\right)\end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}24)$$

特性阻抗与频率的定性关系如下图 2-5。

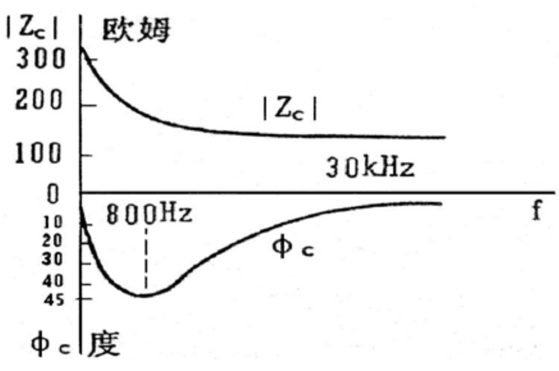


图 2-5 特性阻抗、幅角与频率的定性关系

对于微波传输线，由于频率很高，$R_1 << j\omega L_1$、$G_1 << j\omega C_1$，则：

$$Z_0 \approx \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \qquad (2\text{-}25)$$

公式（2-25）是测量传输线特性阻抗的原理公式。

2.6　均匀传输线传播常数

传播常数 γ 表示行波经过单位长度后振幅和相位的变化。其表示式如下式所示：

$$\gamma = \sqrt{(R_1 + j\omega L_1)(G_1 + j\omega C_1)} = \alpha + j\beta 。 \qquad (2\text{-}26)$$

由于实际微波传输线的损耗 R_1、G_1 比 ωL_1、ωC_1 小得多，式（2-26）经变化后可得：

$$\begin{aligned}\gamma &= \sqrt{(R_1 + j\omega L_1)(G_1 + j\omega C_1)} \\ &= \sqrt{-\omega^2 L_1 C_1 (1 + R_1 / j\omega C_1)(1 + G_1 / j\omega C_1)} \\ &\approx \pm j\omega\sqrt{L_1 C_1}(1 + R_1 / j2\omega L_1 + G_1 / j2\omega C_1) \\ &= \pm\left[\left(\frac{R_1}{2}\sqrt{\frac{C_1}{L_1}} + \frac{G_1}{2}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}\right) + j\omega\sqrt{L_1 C_1}\right]\end{aligned}$$

$$\alpha = \frac{R_1}{2}\sqrt{\frac{C_1}{L_1}} + \frac{G_1}{2}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}} = \frac{R_1}{2Z_0} + \frac{G_1 Z_0}{2} \qquad (2\text{-}27)$$

$$\beta = \omega\sqrt{L_1 C_1} \qquad (2\text{-}28)$$

一般情况下，传播常数 γ 复数，其实部 α 称为衰减常数，单位为 dB/m（有时也用 Np/m，1Np/m=8.86 dB/m）；β 为相移常数，单位为 rad/m。

由式（2-27）得：$\alpha = \dfrac{R_1}{2Z_0} + \dfrac{G_1 Z_0}{2} = \alpha_c + \alpha_d$

其中：

$$\alpha_c = \frac{R_1}{2Z_0} \quad \text{——由导体电阻引起的损耗} \qquad (2\text{-}27a)$$

$$\alpha_d = \frac{G_1 Z_0}{2} \quad \text{——由导体间介质引起的损耗} \qquad (2\text{-}27b)$$

（2-27a）（2-27b）说明传输线上信号的衰减既有导体电阻的热损耗引起的，又有导体间介质极化损耗引起的。

2.7　均匀传输线反射系数

为了表明反射波与入射波的关系，我们定义，线上某处反射波电压（或电流）与入射波电压（或电流）之比为反射系数，用 $\Gamma(z')$ 表示，即：

$$\Gamma(z')=\frac{U_r(z')}{U_i(z')}=\frac{I_r(z')}{I_i(z')} \tag{2-29}$$

由（2-11）式得：

$$\Gamma(z')=\frac{U_2-Z_0I_2}{U_2+Z_0I_2}e^{-2\gamma z'}$$

考虑到负载阻抗 $Z_L=\frac{U_2}{I_2}$，故上式可以写为：

$$\Gamma(z')=\frac{Z_L-Z_0}{Z_L+Z_0}e^{-2\gamma z'} \tag{2-30}$$

在传输线的终端（负载端），z'＝0，终端反射系数用 Γ_2 表示，由式（2-30）得：

$$\Gamma_2=\frac{Z_L-Z_0}{Z_L+Z_0} \tag{2-31}$$

$$\Gamma(z')=\frac{Z_L-Z_0}{Z_L+Z_0}e^{-2\gamma z'}=\Gamma_2e^{-2\gamma z'} \tag{2-32}$$

由此可见，终端反射系数只与负载阻抗和传输线的特性阻抗有关。终端阻抗的类型不同，反射系数也不同。

（1）当 $Z_L=Z_0$（即负载匹配）时，终端反射系数 $\Gamma_2=0$，由反射系数定义知，反射波电压和反射波电流均为零，称为行波状态。

（2）当 $Z_L=0$（即负载短路）时，终端反射系数 $\Gamma_2=-1$；当 $Z_L=\infty$（即负载开路）时，终端反射系数 $\Gamma_2=1$。

在这两种情况下，反射波与入射波幅度相同（负号表示反射波与入射波相位相反），称为全反射状态。

在一般情况下，$0<|\Gamma_2|<1$，称为部分反射。

当引入终端反射系数的概念后，式（2-11）可改写为

$$U(z')=\frac{1}{2}(U_2+Z_0I_2)\left(e^{\gamma z'}+\frac{U_2-Z_0I_2}{U_2+Z_0I_2}e^{-\gamma z'}\right) \tag{2-33}$$

$$I(z')=\frac{1}{2Z_0}(U_2+Z_0I_2)\left(e^{\gamma z'}-\frac{U_2-Z_0I_2}{U_2+Z_0I_2}e^{-\gamma z'}\right) \tag{2-34}$$

将终端反射系数 $\Gamma_2=\frac{Z_L-Z_0}{Z_L+Z_0}=\frac{U_2-Z_0I_2}{U_2+Z_0I_2}$ 带入后，的线上任意点的电压和电流为：

$$U(z')=\frac{1}{2}(U_2+Z_0I_2)\left(e^{\gamma z'}+\Gamma_2e^{-\gamma z'}\right) \tag{2-35}$$

$$I(z')=\frac{1}{2Z_0}(U_2+Z_0I_2)\left(e^{\gamma z'}-\Gamma_2 e^{-\gamma z'}\right) \qquad (2\text{-}36)$$

2.8 均匀传输线输入阻抗

终端接负载阻抗时，则距终端为z'处向负载看去的输入阻抗定义为该点的电压U（z'）与电流I（z'）之比，并用Z_{in}（z'） 表示。根据（2-35）、（2-36）：

$$Z_{in}(z')=\frac{U(z')}{I(z')}=Z_0\frac{e^{\gamma z'}+\Gamma_2 e^{-\gamma z'}}{e^{\gamma z'}-\Gamma_2 e^{-\gamma z'}}=Z_0\frac{1+\Gamma_2 e^{-2\gamma z'}}{1-\Gamma_2 e^{-2\gamma z'}}=Z_0\frac{1+\Gamma(z')}{1-\Gamma(z')} \qquad (2\text{-}37)$$

另外，将公式（2-12）中上下两式相除得:

$$Z_{in}(z')=\frac{U(z')}{I(z')}=Z_0\frac{Z_L e^{\gamma z'}+Z_0 e^{\gamma z'}+Z_L e^{-\gamma z'}-Z_0 e^{-\gamma z'}}{Z_L e^{\gamma z'}+Z_0 e^{\gamma z'}-Z_L e^{-\gamma z'}+Z_0 e^{-\gamma z'}} \qquad (2\text{-}38)$$

利用双曲余弦和双曲正弦:

$$ch\gamma z=\frac{e^{\gamma z}+e^{-\gamma z}}{2} \qquad sh\gamma z=\frac{e^{\gamma z}-e^{-\gamma z}}{2}$$

$$Z_{in}(z')=Z_0\frac{Z_L ch\gamma z'+Z_0 sh\gamma z'}{Z_0 ch\gamma z'+Z_L sh\gamma z'}=Z_0\frac{Z_L+Z_0\tanh\gamma z'}{Z_0+Z_L\tanh\gamma z'} \qquad (2\text{-}39)$$

2.8.1 终端短路（U_2=0）传输线的输入阻抗

重写（2-33）、（2-34）：

$$U(z')=\frac{1}{2}(U_2+Z_0I_2)\left(e^{\gamma z'}+\frac{U_2-Z_0I_2}{U_2+Z_0I_2}e^{-\gamma z'}\right)$$

$$I(z')=\frac{1}{2Z_0}(U_2+Z_0I_2)\left(e^{\gamma z'}-\frac{U_2-Z_0I_2}{U_2+Z_0I_2}e^{-\gamma z'}\right)$$

由U_2=0得：

$$U(z')=\frac{1}{2}(Z_0I_2)\left(e^{\gamma z'}-e^{-\gamma z'}\right)$$

$$I(z')=\frac{1}{2}(I_2)\left(e^{\gamma z'}+e^{-\gamma z'}\right)$$

两式想除得终端短路传输线的输入阻抗：

$$Z_{short}(z')=\frac{U(z')}{I(z')}=Z_0\frac{e^{\gamma z'}-e^{-\gamma z'}}{e^{\gamma z'}+e^{-\gamma z'}} \qquad (A)$$

2.8.2 终端开路（I_2=0）传输线的输入阻抗

由I_2=0得：

$$U(z')=\frac{1}{2}(U_2)\left(e^{\gamma z'}+e^{-\gamma z'}\right)$$

$$I(z')=\frac{1}{2Z_0}(U_2)\left(e^{\gamma z'}-e^{-\gamma z'}\right)$$

两式想除得终端短路传输线的输入阻抗：

$$Z_{open}(z')=\frac{U(z')}{I(z')}=Z_0\frac{e^{\gamma z'}+e^{-\gamma z'}}{e^{\gamma z'}-e^{-\gamma z'}} \qquad \text{(B)}$$

2.8.3　传输线特性阻抗

将(A) (B) 两式相乘得：

$$Z_{short}(z')\times Z_{open}(z')={Z_0}^2$$

$$Z_0=\sqrt{Z_{short}(z')\times Z_{open}(z')} \qquad \text{(C)}$$

2.9　均匀传输线的传输功率和效率

设传输线均匀且$\gamma=\alpha+j\beta$　($\alpha\neq0$)，根据（2-35）及（2-36），沿线电压、电流的解为

$$U(z')=\frac{1}{2}(U_2+Z_0I_2)\left(e^{\gamma z'}+\Gamma_2e^{-\gamma z'}\right)=A_1\left(e^{\gamma z'}+\Gamma_2e^{-\gamma z'}\right)=A_1e^{\alpha z'}\left(e^{j\beta z'}+\Gamma_2e^{-j\beta z'}\right) \qquad \text{（2-40）}$$

$$I(z')=\frac{1}{2Z_0}(U_2+Z_0I_2)\left(e^{\gamma z'}-\Gamma_2e^{-\gamma z'}\right)=\frac{A_1}{Z_0}\left(e^{\gamma z'}-\Gamma_2e^{-\gamma z'}\right)=\frac{A_1}{Z_0}^{\alpha z'}\left(e^{j\beta z'}-\Gamma_2e^{-j\beta z'}\right) \qquad \text{（2-41）}$$

假设 Z_0 为实数，由电路理论可知，传输线上任一点 z 处的传输功率为

$$P(z)=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\{U(z')\dot{I}(z')\}=\frac{|A_1|^2}{2Z_0}e^{2\alpha z'}[1-|\Gamma_2|^2e^{-4\alpha z'}] \qquad \text{（2-42）}$$

$$=P_i(z')-P_r(z')$$

其中，$P_i(z')$ 为入射波功率，$P_r(z')$ 为反射波功率。

设传输线总长为 l，将 $z'=l$ 代入式（2-42），则始端入射功率为

$$P(l)=\frac{|A_1|^2}{2Z_0}e^{2al}\left[1-|\Gamma_2|^2e^{-4al}\right] \qquad \text{（2-43）}$$

终端负载在 $z'=0$ 处，故负载吸收功率为：

$$P(0)=\frac{|A_1|^2}{2Z_0}[1-|\Gamma_2|^2] \qquad \text{（2-44）}$$

由此可得传输线的传输效率为：

$$\eta=\frac{\text{负载吸收功率}p(0)}{\text{始端入射功率}p(l)}=\frac{1-|\Gamma_2|^2}{e^{2al}[1-|\Gamma_2|^2e^{4al}]} \qquad \text{（2-44）}$$

当负载与传输线阻抗匹配时，即 $\Gamma_2=0$，此时传输效率最高，其值为：

$$\eta = e^{-2al} \qquad (2\text{-}44)$$

可见，传输效率取决于传输线的损耗和终端匹配情况。

3 无耗传输线的基本特性

无耗传输线：是指R_1=0，G_1=0 的传输线。一般传输线的导体均采用良导体，周围介质又是低耗介质材料，因此传输线的损耗比较小，满足 $\omega L_1>>R_1$，$\omega C_1>>G_1$，故在分析传输线的传输特性时可以近似看成是无耗线。

3.1 无耗传输线的特性参数

3.1.1 无耗传输线传播常数 γ

由公式（2-5）得：

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

其中：α 为衰减常数；β 为相移常数。

由于无耗传输线的R_1=0，G_1=0，则：

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R_1 + j\omega L_1)(G_1 + j\omega C_1)} = j\omega\sqrt{L_1C_1}$$

因此：

$$\alpha = 0$$

$$\beta = \omega\sqrt{L_1C_1} \qquad (3\text{-}1)$$

3.1.2 无耗传输线相速度

由公式（2-22）：

$$v_p = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{\beta}$$

将 $\beta = \omega\sqrt{L_1C_1}$ 代入上式，便得波的相速度为

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L_1C_1}} \qquad (3\text{-}2)$$

将表1-1中的双线或同轴线的L_1和C_1代入上式，注意到材料介电常数(F/m) $\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$、材料导磁率(H/m) $\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$，其中 ε_0 真空的介电常数，$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}$，$\mu_0$ 为真空的导磁率，$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$，$\varepsilon_r$、$\mu_r$ 分别为相对介电常数和相对导磁率，并注意到光速 $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$，通常，$\mu_r$=1，即 $\mu = \mu_0$。则双线和同轴线上行波的相速度均为：

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\mu_r\varepsilon_0\varepsilon_r}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_r}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} \qquad (3\text{-}3)$$

式中 c 为光速。由此可见，双线和同轴线上行波电压和行波电流的相速度等于传输线周围介质中的光速，它和频率无关，只决定周围介质特性参量，这种波称为无色散波。

公式（3-3）是测量传输线速比的原理公式。

3.1.3 无耗传输线波长

波长是指同一个时刻传输线上电磁波的相位相差2π的距离，即有

$$\lambda_p = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{v_p}{f} = v_p T = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_r}} \qquad (3\text{-}4)$$

式中f为电磁波频率，T为振荡周期，λ_0为真空中电磁波的工作波长。可见传输线上行波的波长也和周围介质有关。

3.1.4 无耗传输线特性阻抗

所谓特性阻抗Z_0是指传输线上入射波电压U_i（z）和入射波电流I_i（z）之比，或反射电压和反射波电流之比的负值。即

$$Z_0 = \frac{U_i(z)}{I_i(z)} = -\frac{U_r(z)}{I_r(z)}$$

由于R_1=0，G_1=0，由式（2-8）得知

$$Z_0 = \frac{R_1 + j\omega L_1}{\gamma} = \sqrt{\frac{R_1 + j\omega L_1}{G_1 + j\omega C_1}} = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \qquad (3\text{-}5)$$

由此可见，无耗传输线的特性阻抗与信号源的频率无关，仅和传输线的单位长度上的分布电感 L_1和分布电容C_1有关，是个实数。由表1-1查得双线的分布电容和分布电感，然后代入式（3-5），便得到对称传输线的特性阻抗计算公式为：

$$Z_0 = \frac{120}{\sqrt{\varepsilon_r}}\ln\frac{D}{r} = \frac{276}{\sqrt{\varepsilon_r}}\lg\frac{D}{r} \qquad (\Omega)$$

式中 ε_r 为双导线周围介质的相对介电常数。同理得同轴线的特性阻抗公式为：

$$Z_0 = \frac{60}{\sqrt{\varepsilon_r}}\ln\frac{b}{a} = \frac{138}{\sqrt{\varepsilon_r}}\lg\frac{b}{a} \qquad (\Omega)$$

常用的同轴线的特性阻抗为 50Ω 和 75Ω 两种。

根据式（3-5）及（3-2）得：

$$Z_0=\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}=\frac{\sqrt{L_1C_1}}{C_1}=\frac{1}{v_pC_1}=\frac{\sqrt{\varepsilon_r}}{cC_1} \tag{3-6}$$

公式（3-3）、（3-4）和（3-6）是测量传输线传输速率、特性阻抗等的原理公式。具体应用见 4.2.3 节。

3.2 无耗传输线的输入阻抗和反射系数

3.2.1 无耗传输线输入阻抗Z_{in}（z）

由于无耗线α=0，$\gamma=j\beta$ 。由公式（2-11）、（2-12）：

$$U(z')=\frac{U_2+Z_0I_2}{2}e^{\gamma z'}+\frac{U_2-Z_0I_2}{2}e^{-\gamma z'}=U_i(z')+U_r(z')$$
$$I(z')=\frac{U_2+Z_0I_2}{2Z_0}e^{\gamma z'}-\frac{U_2-Z_0I_2}{2Z_0}e^{-\gamma z'}=I_i(z')+I_r(z') \tag{3-7}$$

变为：

$$\left.\begin{aligned}U(z')&=\frac{U_2+Z_0I_2}{2}e^{j\beta z'}+\frac{U_2-Z_0I_2}{2}e^{-j\beta z'}=U_i(z')+U_r(z')\\I(z')&=\frac{U_2+Z_0I_2}{2Z_0}e^{j\beta z'}-\frac{U_2-Z_0I_2}{2Z_0}e^{-j\beta z'}=I_i(z')+I_r(z')\end{aligned}\right\} \tag{3-8}$$

应用欧拉公式：

$$\begin{cases}e^{j\beta z'}+e^{-j\beta z'}=2\cos\beta z'\\e^{j\beta z\cdot}-e^{-j\beta z'}=j2\sin\beta z'\end{cases} \tag{3-9}$$

可将式（3-8）写成三角函数表达式

$$\begin{cases}U(z')=U_2\cos\beta z'+jZ_0I_2\sin\beta z'\\I(z')=j\dfrac{U_2}{Z_0}\sin\beta z'+I_2\cos\beta z'\end{cases} \tag{3-10}$$

当终端接负载阻抗时，则距终端为z'处向负载看去的输入阻抗定义为该点的电压U（z'）与电流I（z'）之比，并用Z_{in}（z'）表示。即：

$$Z_{in}(z')=\frac{U(z')}{I(z')}=\frac{U_2\cos\beta z'+jI_2Z_0\sin\beta z'}{\mathrm{j}\dfrac{\mathrm{U}_2}{Z_0}\sin\beta z'+I_2\cos\beta z'}$$

将终端负载条件$U_2=I_2Z_L$代入上式并化简得到

$$Z_{in}(z')=\frac{U(z')}{I(z')}=Z_0\frac{Z_L+jZ_0\tan\beta z'}{Z_0+jZ_L\tan\beta z'} \tag{3-11}$$

将$z'=l$ 代入上式便得到传输线始端的输入阻抗为

$$Z_{in}(l)=Z_0\frac{Z_L+jZ_0\tan\beta l}{Z_0+jZ_L\tan\beta l}\tag{3-12}$$

因为导纳和阻抗互为倒数，故可方便的得到输入导纳与负载导纳的关系式为

$$Y_{in}(z')=Y_0\frac{Y_L+jY_0\tan\beta z'}{Y_0+jY_L\tan\beta z'}\tag{3-13}$$

式中$Y_L=1/Z_L$，$Y_0=1/Z_0$

［例题］一根特性阻抗为50Ω、长度为0.1875m的无耗均匀传输线，其工作频率为200MHz，终端接有负载Z_L=40+j30（Ω），试求其输入阻抗。

解：由工作频率f=200MHz得相移常数$\beta=2\pi f/c=4\pi/3$。将Z_L=40+j30（Ω），Z_0=50，l=0.1875及β值代入式（3-12），有：

$$\begin{aligned}Z_{in}(l)&=Z_0\frac{Z_L+jZ_0\tan\beta l}{Z_0+jZ_L\tan\beta l}\\&=50\frac{40+j30+j50\tan 0.1875\times 4\pi/3}{50+j(40+j30)\tan 0.1875\times 4\pi/3}=50\frac{40+j30+j50\tan\pi/4}{50+j(40+j30)\tan\pi/4}\\&=50\frac{40+j30+j50}{50+j(40+j30)}=50\frac{40+j80}{20+j40}\\&=100(\Omega)\end{aligned}$$

3.2.2　无耗传输线反射系数

传输线上任意点的电压和电流均为入射波和反射波的叠加。反射波的大小和相位可用反射系数Γ（z'）来描写。

距终端为z'处的电压反射系数$\Gamma_v(z')$定义为该点的反射电压与该点的入射波电压之比，即：

$$\Gamma_v(z')=\frac{U_r(z')}{U_i(z')}\tag{3-14}$$

同理z' 处的电流反射系数Γ_I（z'）为

$$\Gamma_I(z')=\frac{I_r(z')}{I_i(z')}\tag{3-15}$$

由式（3-10），比较可得

$$\Gamma_v(z')=-\Gamma_I(z')\tag{3-16}$$

可见，传输线上任意点的电压反射系数和电流系数大小相等，相位相反，因常采用电压反射系数来描写反射波的大小和相位，故以后提到反射系数，如果未加指明，都表示电压反

射系数，并用Γ（z'）表示。

由式（3-8）可以得到无耗线上离终端Γ（z'）处的电压反射系数为

$$\Gamma_V(z') = \frac{U_r(z')}{U_i(z')} = \frac{U_2 - I_2 Z_0}{U_2 + I_2 Z_0} e^{-j2\beta z'} = \Gamma_2 e^{-2j\beta z'} \quad (3\text{-}17)$$

式中Γ_2 为终端的反射系数，其值为

$$\Gamma_2 = \frac{U_2 - I_2 Z_0}{U_2 + I_2 Z_0} = \frac{Z_L I_2 - I_2 Z_0}{Z_L I_2 + I_2 Z_0} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = |\Gamma_2| e^{j\varphi 2} \quad (3\text{-}18)$$

可见，终端电压反射系数仅决定于终端负载阻抗Z_L和传输线的特性阻抗Z_0；终端电压反射系数的模表示终端反射波电压与入射波电压振幅的比值，其相位φ2表示终端反射波的电压与入射波电压之间的相位差。

将式（3-18）代入（3-17），便得到无耗传输线离终端z' 处的电压反射系数为

$$\Gamma(z') = |\Gamma_2| e^{j(\varphi 2 - 2\beta z')} \quad (3\text{-}19)$$

因此，无耗线上任意点的反射系数的大小等于终端负载的反射系数，其相位比终端处的反射系数相位落后$2\beta z'$。

线上任意点电压和电流可用反射系数来表示，即

$$\begin{cases} U(z') = U_i(z') + U_r(z') = U_i(z')[1 + \Gamma(z')] \\ I(z') = I_i(z') + I_r(z') = I_i(z')[1 - \Gamma(z')] \end{cases} \quad (3\text{-}20)$$

上面两式相比，便可得到线上某点的输入阻抗和该点的电压反射系数的关系式为

$$Z_{in}(z') = Z_0 \frac{1 + \Gamma(z')}{1 - \Gamma(z')} \quad (3\text{-}21)$$

上式表明，线上任意点的反射系数和该点向负载看去的输入阻抗有一一对应的关系。将$z'=0$ 代入上式，便得终端负载阻抗与终端反射系数的关系，即为

$$Z_L = Z_0 \frac{1 + \Gamma_2}{1 - \Gamma_2} \quad \text{或} \quad \Gamma_2 = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \quad (3\text{-}22)$$

3.3 无耗传输线驻波系数和行波系数

当电磁波在终端负载不等于传输线特性阻抗的传输线上传输时，会产生反射波。反射波的大小除了用电压反射系数来描写外，还可用驻波系数（VSWR）或行波系数K来表示。驻波系数ρ定义为沿线合成电压（或电流）的最大值和最小值之比，即

$$\rho = \frac{|U|_{\max}}{|U|_{\min}} = \frac{|I|_{\max}}{|I|_{\min}} \quad (3\text{-}23)$$

传输线上合成电压（或电流）振幅值的不同，是由于各处入射波和反射波的相位不同而引

起的。可见当入射波的相位与该点反射波的相位同相时，则该处合成波电压（或电流）出现最大值，反之两者相位相反时，合成波出现最小值，故有

$$|U|_{\max}=|U_i|+|U_r|=|U_i|(1+|\Gamma|),\quad |U|_{\min}=|U_i|-|U_r|=|U_i|(1-|\Gamma|)$$

由此可得到驻波系数和反射系数的关系式为

$$\rho=\frac{|U|_{\max}}{|U|_{\min}}=\frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|}\quad \text{或者}$$

$$|\Gamma|=\frac{\rho-1}{\rho+1}\tag{3-24}$$

行波系数K定义为沿线电压（或电流）的最小值与最大值之比，即驻波系数的倒数。故

$$K=\frac{1}{\rho}=\frac{1-|\Gamma|}{1+|\Gamma|}\tag{3-25}$$

因此，传输线的反射波的大小，可用反射系数的模、驻波系数和行波系数来表示。反射系数的范围为$0\le|\Gamma|\le1$；驻波系数的范围为$1\le\rho\le\infty$；行波系数的范围为$0\le K\le1$。当$|\Gamma|=0$、$\rho=1$和$K=1$时，表示传输线上没有反射波，即为匹配状态。

[例题］一根75Ω均匀无耗传输线，终端接有负载$Z_L=R_L+jX_L$，欲使线上电压驻波比为3，则负载的实部R_L和虚部X_L应满足什么关系？

解：由驻波比ρ=3，可得终端反射系数的模值应为：

$$|\Gamma_2|=\frac{\rho-1}{\rho+1}=0.5$$

于是由式（3-22）得

$$|\Gamma_2|=\left|\frac{Z_L-Z_0}{Z_L+Z_0}\right|=0.5$$

将$Z_L=R_L+jX_L$，$Z_0=75$代入上式，

$$\left|\frac{R_L+jX_L-75}{R_L+jX_L+75}\right|=0.5$$

$$\frac{\sqrt{(R_L-75)^2+X_L{}^2}}{\sqrt{(R_L+75)^2+X_L{}^2}}=\frac{1}{2}$$

整理得负载的实部R_L和虚部X_L应满足的关系式为

$$(R_L-125)^2+X_L{}^2=100^2$$

即负载的实部R_L和虚部X_L应在圆心为（125, 0）、半径为100的圆上，上半圆对应负载为感抗，而下半圆对应负载为容抗。

3.4 无耗传输线传输功率

传输线主要用来传输功率。

根据（3-20），无耗传输线上任意点z处的电压、电流为：

$$\begin{cases} U(z') = U_i(z')[1+\Gamma(z')] \\ I(z') = I_i(z')[1-\Gamma(z')] \end{cases}$$

因此传输功率为

$$P(z') = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{U(z')\dot{I}(z')\} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{U_i(z')[1+\Gamma(z')]\dot{I}_i(z')[1-\dot{\Gamma}(z')]\}$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\frac{|U_i(z')|^2}{Z_0}[1-|\Gamma(z')|^2+\Gamma(z')-\dot{\Gamma}(z')]\}$$

（3-26）

对于无耗线Z_0为实数，而上式中括号内第三与第四项之差为虚数，因此上式变为

$$\mathrm{P}(z') = \frac{|U_i(z')|^2}{2Z_0}(1-|\Gamma(z')|^2) = P_i(z') - P_r(z') \qquad （3\text{-}27）$$

式中$P_r(z')$和$P_i(z')$分别表示z点处反射波功率和入射波功率，两者之比$|\Gamma(z')|^2$为功率反射系数。式（3－27）表明，无耗传输线上通过任意点的传输功率等于该点的入射波功率与反射波功率之差。由于是无耗线，因此通过线上任意点的传输功率都是相同的，即传输线始端的输入功率等于终端负载吸收功率，也等于电压波腹点或电压波节点处的传输功率，为了简便起见，一般在电压波腹点或电压波节点处计算传输功率，即

$$P(z') = \frac{1}{2}|U|_{\max}|I|_{\min} = \frac{1}{2}\frac{|U|^2{}_{\max}}{Z_0}K \qquad （3\text{-}28）$$

式中$|U|_{\max}$ 决定传输线间击穿电压U_{br}，在不发生击穿情况下，传输线允许传输的最大功率称为传输线的功率容量，其值应为

$$P_{br} = \frac{1}{2}\frac{|U_{br}|^2}{Z_0}K \qquad （3\text{-}29）$$

可见，传输线的功率容量与行波系数K有关，K愈大，功率容量愈大，

4 均匀无耗传输线工作状态的分析

传输线的工作状态是指沿线电压、电流以及阻抗的分布规律。传输线的工作状态有三种：行波、驻波和行驻波。它主要决定于终端所接负载阻抗的大小和性质。下面分别讨论。

4.1 行波工作状态（无反射情况）

根据公式（3－18）：

$$\Gamma_2=\frac{U_2-I_2Z_0}{U_2+I_2Z_0}=\frac{Z_LI_2-I_2Z_0}{Z_LI_2+I_2Z_0}=\frac{Z_L-Z_0}{Z_L+Z_0}=|\Gamma_2|e^{j\varphi 2}$$

可以得到传输线无反射波的条件为

$$Z_L=Z_0$$

此时，令式（2－14）中右边第二项为零，便得到行波状态时沿线电压和电流的表达式为

$$\begin{cases}U(z)=\dfrac{U_1+I_1Z_0}{2}e^{-j\beta z}=U_{1i}e^{-j\beta z}=\left|U_{1i}\right|e^{j(\varphi_1-\beta z)}\\ I(z)=\dfrac{U_1+I_1Z_0}{2Z_0}e^{-j\beta z}=I_{1i}e^{-j\beta z}=\left|I_{1i}\right|e^{j(\varphi_1-\beta z)}\end{cases} \quad (4\text{-}1)$$

式中U_1 和I_1 分别表示始端的电压和电流，U_{1i} 和I_{1i} 分别表示始端的入射波电压和电流，φ_1为始端入射波电压（或电流）的初相位。

由式（4-1）中两式之比，便得到行波工作状态时，沿线某点的输入阻抗为：

$$Z(z)=\frac{U(z)}{I(z)}=\frac{U_{1i}e^{-j\beta z}}{I_{1i}e^{-j\beta z}}=Z_0 \quad (4\text{-}2)$$

由上面的分析可知，当负载阻抗等于传输线特性阻抗时，均匀无耗传输线上传播的波为行波，沿线各点电压和电流的振幅不变；相位随z增加不断滞后；沿线各点输入阻抗均等于传输线的特性阻抗，如图4-1所示。

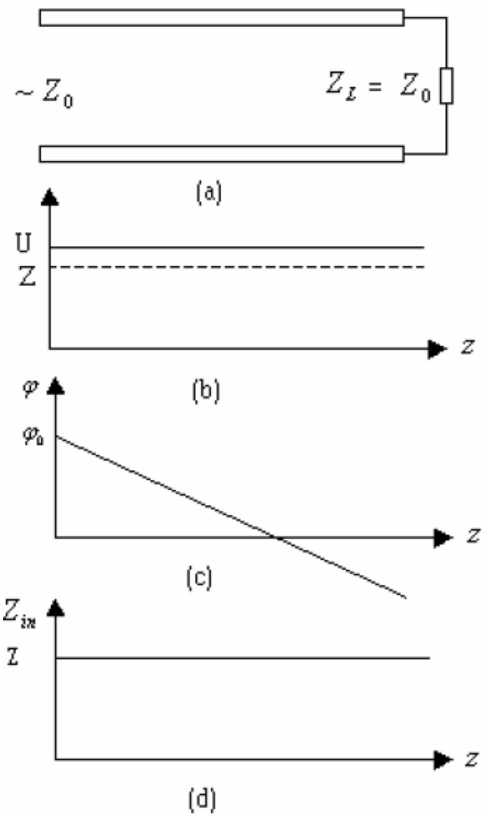


图4-1

4.2 驻波工作状态（全反射情况）

根据公式（3－18）：

$$\Gamma_2=\frac{U_2-I_2Z_0}{U_2+I_2Z_0}=\frac{Z_LI_2-I_2Z_0}{Z_LI_2+I_2Z_0}=\frac{Z_L-Z_0}{Z_L+Z_0}=|\Gamma_2|e^{j\varphi 2}$$

可以得到传输线上产生全反射（即$|\Gamma_2|=1$）的条件为：

$$Z_L=0、\infty、\pm jX$$

即始端短路、开路或接纯电抗负载。由终端没有吸收功率的电阻元件，传输线将会产生全反射而形成驻波，故称它为驻波元件，传输线将会产生全反射而形成驻波，故称它为驻波工作状态。

四种终接情况下线上电压和电流均为驻波分布。所不同的仅是驻波分布的位置不同。

4.2.1 终端短路（Z_L=0，Γ_2=-1）

因 Z_L=0，则有U_2=0，由公式3-8即可得到

$$\begin{cases}U_{2i}=-U_{2r}\\ I_{2i}=I_{2r}\text{或}I_2=2I_{2i}\end{cases}\qquad(4\text{-}3)$$

将U_2=0 代入式（3－10），便得到终端短路时，沿线电压、电流分布表达式为

$$\begin{cases} U(z') = jI_2 Z_0 \sin\beta z' \\ I(z') = I_2 \cos\beta z' \end{cases} \tag{4-4}$$

由（4-3）：

$$\begin{cases} U(z') = j2I_{2i} Z_0 \sin\beta z' = j2U_{2i} \sin\beta z' \\ I(z') = 2I_{2i} \cos\beta z' \end{cases} \tag{4-5}$$

上式取绝对值

$$\begin{cases} |U(z')| = 2|U_{2i}||\sin\beta z'| \\ |I(z')| = 2|I_{2i}||\cos\beta z'| \end{cases} \tag{4-6}$$

令 $U_{2i} = |U_{2i}|e^{j\varphi_2}, I_{2i} = |I_{2i}|e^{j\varphi_2}$

则沿线电压和电流的瞬时值表达式为

$$\begin{cases} U(z,t) = 2|U_{2i}|\sin\beta z' \cos(\omega t + \varphi_2 + \frac{\pi}{2}) \\ i(z,t) = 2|I_{2i}|\cos\beta z' \cos(\omega t + \varphi_2) \end{cases} \tag{4-7}$$

沿线电压、电流的振幅值和瞬时值分布分别如图4-2 中（c）和（b）所示。由图可见，瞬时电压或电流在某个固定位置上随时间 t 作正弦或余弦变化，而在某一个时刻 t 时随距离作余弦或正弦变化，即瞬时电压和电流的时间相位差和空间相位差均为 $\pi/2$ ，则表明传输线上没有功率的传输。而离终端距离$z'=\lambda/4$ 的奇数倍处，电压振幅值永远最大，电流振幅值永远为零，称为电压的波腹点和电流的波节点；而在$z'=\lambda/2$ 的整数倍处，电压为波节点或电流为波腹点。

由式（4-4）中两式相比，可以得到终端短路时，沿线的阻抗分布的表达式为

$$Z_{in}(z') = Z(z') = jZ_0 \tan\beta z' \tag{4-8}$$

终端短路的传输线的阻抗为纯电抗，沿线阻抗分布如图4-2(d)所示。由图可见，在$z'=\lambda/4$ 的奇数倍处（即电压腹点）阻抗$z=\infty$ ，可等效为并联谐振回路；在$z'=\lambda/2$ 的整数倍（即电压节点）处 ，阻抗Z=0，可等效为串联谐振回路；在$0<z'<\lambda/4$范围内，阻抗$Z=+jX$ 为感性电抗，故可以等效为电感；在$\lambda/4<z'<\lambda/2$范围内，阻抗 $Z=-jX$ 为容性电抗，故可以等效为电容，每隔$\lambda/2$ 阻抗特性重复一次，每隔$\lambda/4$ 阻抗性质变化一次。沿线各区域相应的等效电路如图4-2（e）所示。

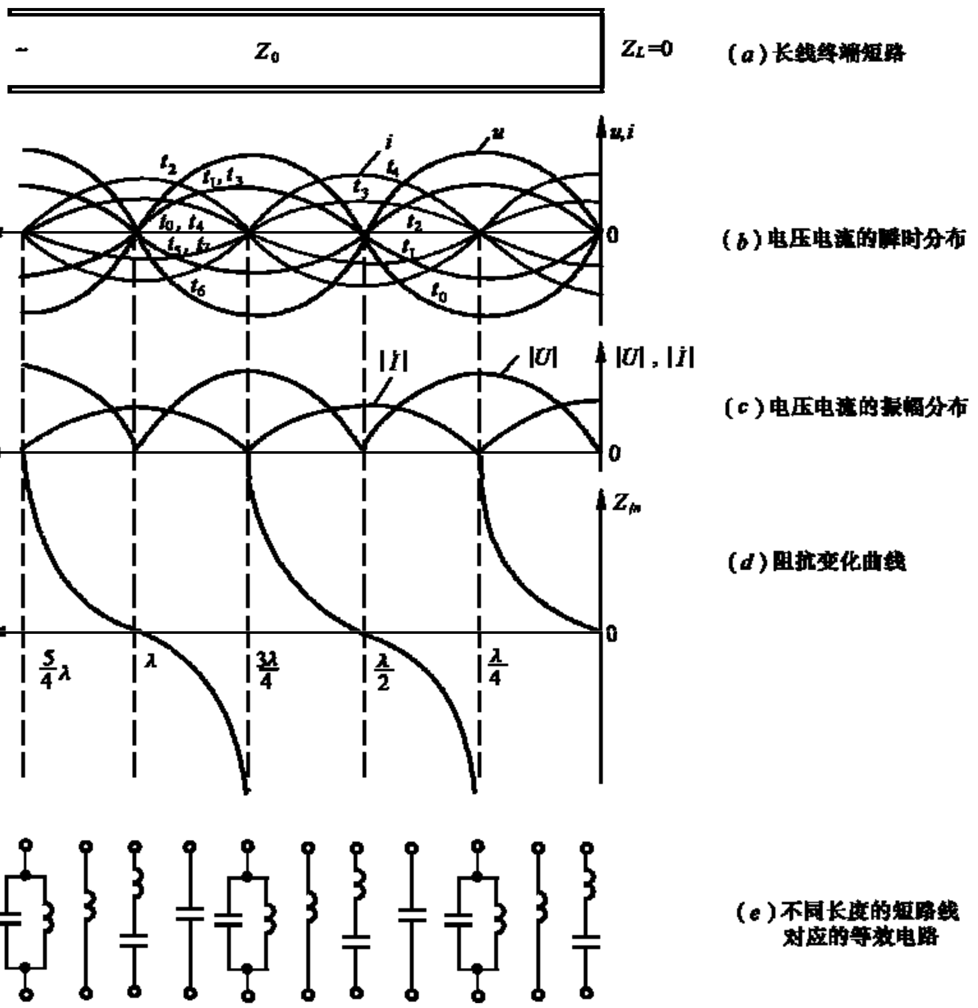


图4-2

4.2.2 终端开路（$Z_L=\infty$,$\Gamma_2=1$）

因$Z_L=\infty$，$I_2=0$，由公式3-8即可得到

$$\begin{cases} U_{2i}=U_{2r}\text{或}U_2=2U_{2i} \\ I_{2i}=-I_{2r} \end{cases} \tag{4-9}$$

将 $Z_L=\infty$，$I_2=0$代入式（3-10），可的终端开路时沿线电压、电流分布的表达式为

$$\begin{cases} U(z')=U_2\cos\beta z'=2U_{2i}\cos\beta z' \\ I(z')=j\dfrac{U_2}{Z_0}\sin\beta z'=j\dfrac{2U_{2i}}{Z_0}\sin\beta z'=j2I_{2i}\sin\beta z' \end{cases} \tag{4-10}$$

上面两式相比，可得沿线阻抗分布的表达式

$$Z_{in}(z')=-jZ_0\cot\beta z' \tag{4-11}$$

图4-3 给出了终端开路时沿线电压、电流振幅值和阻抗的分布。

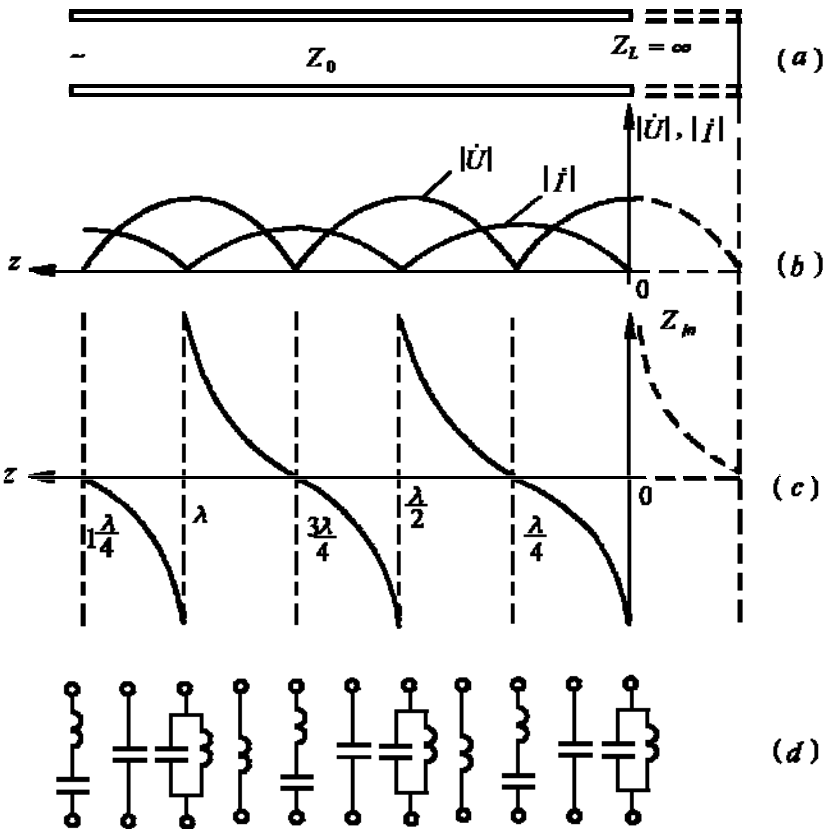


图4-3

由图可见终端为电压波腹点、电流波节点，阻抗为无穷大。和终端短路的情况相比，可以得到这样一个结论：只要将终端短路的传输线上电压、电流及阻抗分布从终端开始去掉λ/4 线长，余下线上的分布即为终端开路的传输线上沿线电压、电流及阻抗分布。这就启发我们将终端短路（或终端开路）的传输线上电压、电流及阻抗分布自终端起去掉小于λ/4 线长，即可得到终接纯感抗（或容抗）负载时的沿线电压、电流及阻抗分布。

综上所述，当无耗线终端短路、终端开路或接纯电抗负载时，线上将会产生全反射而形成驻波。驻波具有下列特性：沿线电压、电流的振幅值随位置而变化，但在某些位置上永远是电压的波腹点（或电流的波节点）且波腹点电压值为两倍的入射波电压；在与电压波腹点相差λ/4 处永远是电压波节点（或电流波腹点），且波节点振幅值为零；沿线电压和电流在时间和距离上均相差π/2，因此线上没有能量的传输；沿线阻抗分布除了电压波腹点为无限大和波节点为零以外，其余各处均为纯电抗；两波节点之间沿线电压（或电流）相位相同，在波节点的两侧沿线电压（或电流）相位相反。

4.2.3 终端开路、短路特性在传输线测量中的应用

利用传输线终端开路、短路的特性，即输入阻抗周期性地出现并联谐振和短路谐振的特性，按图4-4所示的谐振法进行传输线的阻抗测量。如采用网络分析仪测量，可代替图4-4所示中的信号发生器和RF电平表，此时屏幕上显示的测量曲线如图4-5所示。

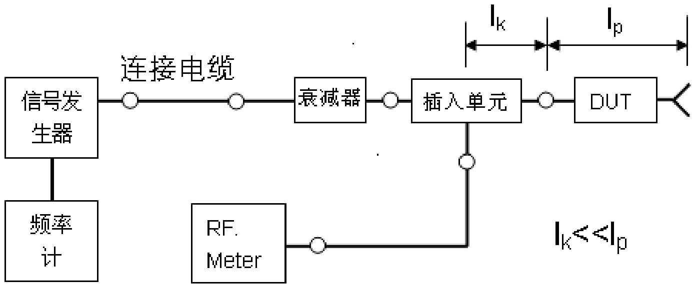


图4-4

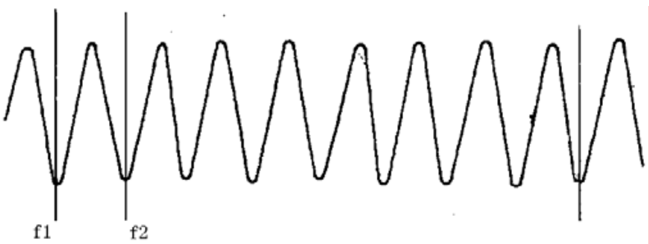


图4-5

设电缆长度为l，f_1及f_2为相邻的串联谐振点，传输线的传播速度为v_p，由于：

$$\lambda = v_p / f \qquad 4\text{-}12$$

则，频率为f、长度为l的电缆上的波长数n为：

$$n = l / \lambda$$

根据终端开路、短路传输线输入阻抗的特性，相邻的串联谐振频率f_1及f_2之间相差1/2的波长数，即：

$$l/\lambda_2 - l/\lambda_1 = 1/2$$

代入4-12得：

$$\frac{lf_2}{v_p} - \frac{lf_1}{v_p} = \frac{l}{v_p}\left(f_2 - f_1\right) = \frac{l}{v_p}\Delta f = \frac{1}{2}$$

得：

$$v_p = 2\Delta f \cdot l \qquad 4\text{-}13$$

代入式（3-6）得：

$$Z_0 = \frac{1}{v_p C_1} = \frac{1}{2\Delta f \cdot l \cdot C_1} = \frac{1}{2\Delta f C} \qquad 4\text{-}14$$

式（4-14）是谐振法测量传输线平均特性阻抗的具体公式。

另外：重新列出公式（4-8）及公式（4-11），即终端短路和终端开路的传输线输入阻抗分别为：

$$Z_{short} = jZ_0 \tan \beta z'$$

$$Z_{open} = -jZ_0 \cot \beta z'$$

两式相乘得：

$$Z_{short} \cdot Z_{open} = jZ_0 \tan \beta z'(-jZ_0 \cot \beta z') = Z_0{}^2$$

得：

$$Z_0 = \sqrt{Z_{short} \cdot Z_{open}} \qquad 4\text{-}15$$

式（4−15）是开短路法测量传输线特性阻抗的具体公式。

4.3 行驻波工作状态（部分反射情况）

当均匀无耗线终接除上面所述负载以外情况时，信号源给出的一部分能量被负载吸收，另一部分能量将被负载反射，从而产生部分反射而形成行驻波。

研究行驻波状态下沿线电压、电流的分布规律，也可以采用上面的解析方法来分析，但比较麻烦。这里介绍一种矢量的分析方法，这种方法比较直观，而且也是下面将要讨论的阻抗圆图的基础。

为了清楚起见，将式（3-20）重写如下：

$$\begin{cases} U(z') = U_i[1+\Gamma(z')] \\ I(z') = I_i[1-\Gamma(z')] \end{cases}$$

上式分别除以U_i和I_i，得归一化电压和电流，并分别用$\overline{U}(z')$和$\overline{I}(z')$来表示。即：

$$\begin{cases} \overline{U}(z') = \dfrac{U(z')}{U_i(z')} = 1+\Gamma(z') = 1+|\Gamma_2|e^{j(\varphi_2-2\beta z')} \\ \overline{I}(z') = \dfrac{I(z')}{I_i(z')} = 1-\Gamma(z') = 1-|\Gamma_2|e^{j(\varphi_2-2\beta z')} \end{cases} \qquad （4－12）$$

上面两式之比即为归一化阻抗

$$\overline{Z}(z') = \frac{1+\Gamma(z')}{1-\Gamma(z')} \qquad （4－13）$$

现在，我们将上式用矢量来表示，并画在一个复平面上。式（4-12）中的第一式的第一项为实数1，表示在实轴方向的单位矢量，它是始终不变的。第二项为反射系数的旋转矢量，它的模为$|\Gamma|$，在终端处反射系数的相角为φ_2，即在复平面上终端处的反射系数和实轴的夹角。<u>由于无耗线上任意点的反射系数的模等于终端负载的反射系数的模，</u>即$|\Gamma|=|\Gamma_2|$。当离终端向电源方向移动时，反射系数的相位不断落后，即反射系数矢量沿着$|\Gamma|$ 的圆顺

时针方向旋转；反之，当从电源向负载方向移动时，反射系数的相位愈来愈超前，即反射系数矢量沿|Γ| 的圆反时针方向旋转。那么沿线某点的归一化振幅值是单位矢量与该点的旋转反射系数矢量的叠加。如图4-4（*a*）所示。

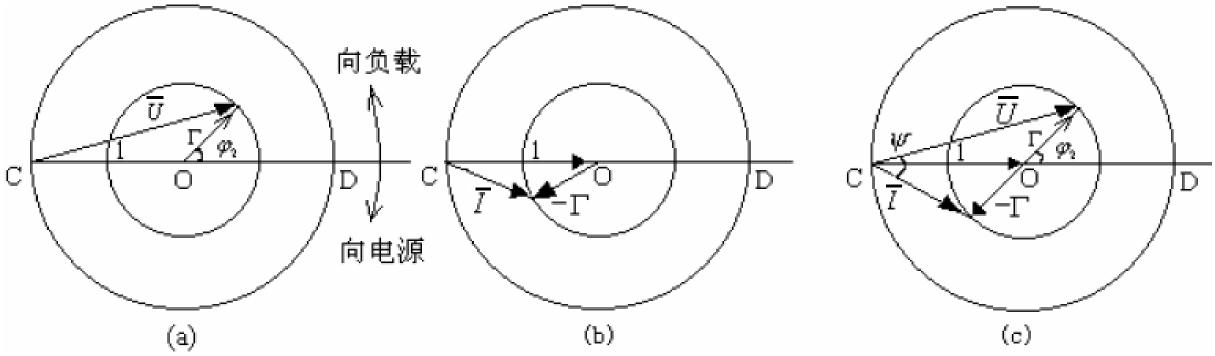


图4-4

同样，由式（4-12）第二式可知，单位矢量和某点反射系数旋转矢量的差，称为该点的归一化电流矢量。将反射系数矢量旋转，即可得到沿线归一化电流的振幅分布。如图4-4(*b*)。

把归一化电压矢量和电流矢量画在同一个复平面上，如图4-4（*c*）所示。Ψ 为归一化电压和归一化电流矢量的相位差，它反映该点的阻抗特性。将反射系数矢量大小随Z_L变化并旋转就可以得到终接任意负载时沿线各点的电压、电流和阻抗分布规律。这种方法既简单又直观。下面应用矢量图方法来分析任意负载情况下的一般特性。

4.3.1 电压波腹电和波节点的位置和大小

由图4-4 可见，当反射系数矢量旋转到与$\overrightarrow{OD}$ 轴重合时，合成的归一化电压为最大（或归一化电流最小），故$\overrightarrow{OD}$轴为电压波腹点（或电流波节点）的轨迹，由式（4-12）可知。终端到第一个电压波腹点的距离$z'_{\max1}$应满足

$$\varphi_2 - 2\beta z'_{\max1} = 0$$

即

$$Z'_{\max1} = \frac{\varphi_2}{2\beta} \qquad (4\text{-}14)$$

此时电压最大值为

$$\overline{U}_{\max} = 1 + |\Gamma| \qquad (4\text{-}15)$$

当反射系数矢量旋转到与$\overrightarrow{OC}$轴重合时，合成归一化电压为最小（或归一化电流最大）。故$\overrightarrow{OC}$轴为电压波节点（或电流波腹点）的轨迹，由式（4-2）可知终端到第一个电压波节点的距离$z'_{\min1}$应满足

$$\varphi_2 - 2\beta z'_{\min1} = -\pi$$

即

$$z'_{\min 1}=\frac{\varphi_2}{2\beta}+\frac{\pi}{2\beta}=\frac{\varphi_2}{2\beta}+\frac{\lambda}{4} \tag{4-16}$$

此时电压最小值为

$$\overline{U}_{\min}=1-|\Gamma| \tag{4-17}$$

因此式（4-15）和（4-17）的比值为线上的驻波系数，即为

$$\rho=\frac{\overline{U}_{\max}}{\overline{U}_{\min}}=\frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|}=\frac{1}{K} \tag{4-18}$$

4.3.2 阻抗特性

由图4-4（c）可见，当反射系数矢量落在上半平面内，则电压超前电流，阻抗为感性，故上半平面为感性阻抗的轨迹；当反射系数矢量落在下半平面内，则电流超前电压，阻抗为容性，故下半平面为容性阻抗的轨迹；当反射系数矢量落在$\overrightarrow{OD}$实轴上，则电压和电流同相。阻抗为纯阻且最大，此处电压为波腹点而电流为波节点，故该处的归一化电阻正好为驻波系数：

$$\overline{R}_{\max}=\frac{\overline{U}_{\max}}{\overline{I}_{\min}}=\frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|}=\rho \tag{4-19}$$

当反射系数矢量落在$\overrightarrow{OC}$负实轴上，则电压和电流同相，阻抗为纯阻且最小，此处为电压波节点和电流波腹点，故该处归一化电阻正好为行波系数：

$$\overline{R}_{\min}=\frac{\overline{U}_{\min}}{\overline{I}_{\max}}=\frac{1-|\Gamma|}{1+|\Gamma|}=K \tag{4-20}$$

由此可见，将单位矢量与反射系数旋转矢量合成即可得到任意负载情况下沿线电压、电流和阻抗的分布。

5 阻抗圆图及其应用

在微波工程中，经常会遇到阻抗的计算和匹配问题。章节4中已经介绍了终接任意负载阻抗的无耗线上任意一点的阻抗可用式（3-12）进行计算，但由于是复数运算，非常麻烦。工程中常用阻抗圆图来进行计算，既方便，又能满足工程要求。本节介绍圆图的构造、原理及其应用。

为了使阻抗圆图适用于任意特性阻抗的传输线的计算，故圆图上的阻抗均采用归一化值。由式（3-21）可得归一化阻抗与该点反射系数的关系为

$$\overline{Z}(z')=\frac{Z(z')}{Z_0}=\frac{1+\Gamma(z')}{1-\Gamma(z')} \tag{5-1}$$

$$\overline{Z}_L=\frac{Z_L}{Z_0}=\frac{1+\Gamma_2}{1-\Gamma_2}$$

或

$$\Gamma(z')=\frac{\overline{Z}(z')-1}{\overline{Z}(z')+1} \quad (5\text{-}2)$$

$$\Gamma_2=\frac{\overline{Z}_L-1}{\overline{Z}_L+1}$$

$$\Gamma(z')=\Gamma_2 e^{-j2\beta z'} \quad (5\text{-}3)$$

式中 $\overline{Z}(z')$ 和 $\overline{Z}_L$ 分别为任意点和负载的归一化阻抗；Γ（z'）和 Γ_2 分别为任意点和负载的反射系数。

根据上述基本公式，在直角坐标系中绘出的几组曲线称为直角坐标圆图；而在极坐标中绘出的曲线图称为极坐标圆图，又称为史密斯（**smith**）画图。其中以smith 圆图应用最广，故这里只介绍 smith 圆图的构造和应用。

5.1 阻抗圆图

阻抗圆图是由等反射系数圆族、等电阻圆族、等电抗圆族及等相位线族组成。下面分别讨论之。

5.1.1 等反射系数圆

无耗传输线上离终端距离为 z' 处的反射系数为（注意欧拉公式）

$$\begin{aligned}\Gamma(z') &= |\Gamma_2|e^{j\varphi} = |\Gamma_2|e^{j(\varphi_2-2\beta z')}\\ &= |\Gamma_2|\cos(\varphi_2-2\beta z')+j|\Gamma_2|\sin(\varphi_2-2\beta z')\\ &= \Gamma_a + j\Gamma_b \end{aligned} \quad (5\text{-}4)$$

故有 ：

$$|\Gamma|^2=\Gamma_a^2+\Gamma_b^2 \quad (5\text{-}5)$$

上式表明，在 $\Gamma=\Gamma_a+j\Gamma_b$ 复平面等反射系数模的轨迹是以坐标原点为圆心、$|\Gamma_2|$为半径的圆。不同的反射系数模，就对应不同大小的圆。因为$|\Gamma|\le 1$，因此所有的反射系数圆都位于单位圆内。这一种圆族称为等反射系数圆族。又因为反射系数模和驻波系数有一一对应的关系（$\rho=\frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|}$），故又称它为等驻波系数圆族。半径为零，即坐标原点为匹配点；半径为1，表示最外面的单位圆为全反射圆。

5.1.2 等相位线

离终端距离为z'处反射系数的相位为

$$\varphi=\varphi_2-2\beta z'=\arctan\frac{\Gamma_a}{\Gamma_b} \quad (5\text{-}6)$$

上式为直线方程，既表明在Γ复平面上等相位线是由原点发出的一系列的射线。若已知终端的反射系数为 $\Gamma_2=|\Gamma_2|e^{j\varphi_2}$，则离开终端处的反射系数为

$$\Gamma(z') = |\Gamma_2| e^{j(\varphi_2 - 2\beta z')} \qquad (5\text{-}7)$$

上式表明，Γ（z'）的相位比终端处的相位滞后$2\beta z' = 4\pi z'/\lambda$弧度，即由$\Gamma_2$处沿$|\Gamma_2|$圆顺时针转过$2\beta z'$弧度；反之如果已知$z'$处的反射系数Γ（$z'$），那么终端的反射系数$\Gamma_2$为

$$\Gamma_2 = \Gamma(z') e^{j2\beta z'} \qquad (5\text{-}8)$$

表示终端的反射系数Γ_2的相位超前Γ（z'）处$2\beta z'$弧度，即由Γ（z'）处沿等反射系数圆逆时针方向转过$2\beta z'$弧度。

由此可见，如果在传输线上由z'处向电源方向移动Δl一段距离，则Γ（$z'+\Delta l$）的相位由Γ（z'）处顺时针方向转过$\Delta\varphi = 2\beta\Delta L$弧度；反之在传输线上由$z'$处向负载方向移动$\Delta l$一段距离，则Γ（$z'-\Delta l$）的相位由Γ（$z'$）处逆时针方向转过$\Delta\varphi = 2\beta\Delta L$弧度。传输线上移动距离与圆图上转动角度的关系为

$$\Delta\varphi = 2\beta\Delta l = \frac{4\pi}{\lambda}\Delta l = 4\pi\frac{\Delta l}{\lambda} = 4\pi\Delta\theta \qquad (5\text{-}9)$$

式中$\Delta\theta = \Delta l/\lambda$为电长度的增量，当$\Delta\theta = 0.5$时，则$\Delta\varphi = 360°$。表明在传输线上移$\lambda/2$，则在圆图上反射系数转过一圈，重复到原来的位置。反射系数的相角既可以用角度来表示，也可以用电长度来表示。在圆图的最外面两圈分别表示了电长度和角度的读数。如图5-1 表示了反射系数圆及电长度和角度的标度值。

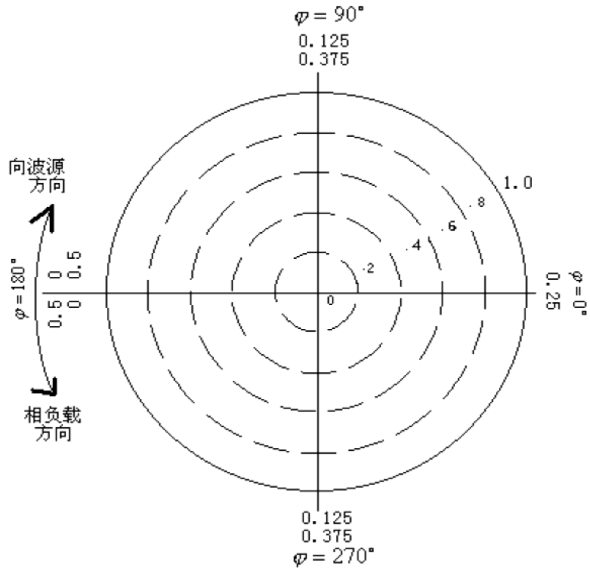


图5-1

5.1.3 等阻抗圆

将$\Gamma = \Gamma_a + j\Gamma_b$代入式（5-1），并将实部和虚部分开，得到

$$\overline{Z}(z) = \frac{1+\Gamma_a + j\Gamma_b}{1-\Gamma_a - j\Gamma_b} = \frac{1-(\Gamma_a^2+\Gamma_b^2)}{(1-\Gamma_a)^2+\Gamma_b^2} + j\frac{2\Gamma_b}{(1-\Gamma_b)^2+\Gamma_b^2} = \overline{R} + j\overline{X} \qquad (5\text{-}10)$$

式中

$$\overline{R}=\frac{1-(\Gamma_a{}^2+\Gamma_b{}^2)}{(1-\Gamma_a)^2+\Gamma_b{}^2} \tag{5-11}$$

$$\overline{X}=\frac{2\Gamma_b}{(1-\Gamma_a)^2+\Gamma_b{}^2} \tag{5-12}$$

$\overline{R}$ 为归一化电阻，$\overline{X}$ 为归一化电抗。

将式（5-11）和式（5-12）分别作如下整理：

由式（5-11）得：

$$\overline{R}+\overline{R}\Gamma_a{}^2-2\overline{R}\Gamma_a+\overline{R}\Gamma_b{}^2=1-\Gamma_a{}^2-\Gamma_b{}^2$$

$$\Gamma_a{}^2+\overline{R}\Gamma_a{}^2-2\overline{R}\Gamma_a+\overline{R}\Gamma_b{}^2+\Gamma_b{}^2=1-\overline{R}$$

$$(1+\overline{R})\Gamma_a{}^2-2\overline{R}\Gamma_a+(1+\overline{R})\Gamma_b{}^2=1-\overline{R}$$

$$\Gamma_a{}^2-\frac{2\overline{R}}{1+\overline{R}}\Gamma_a+\Gamma_b{}^2=\frac{1-\overline{R}}{1+\overline{R}}$$

$$\Gamma_a{}^2-\frac{2\overline{R}}{1+\overline{R}}\Gamma_a+\frac{\overline{R}^2}{(1+\overline{R})^2}+\Gamma_b{}^2-\frac{\overline{R}^2}{(1+\overline{R})^2}=\frac{1-\overline{R}}{1+\overline{R}}$$

$$(\Gamma_a-\frac{\overline{R}}{1+\overline{R}})^2+\Gamma_b{}^2=\frac{1-\overline{R}}{1+\overline{R}}+\frac{\overline{R}^2}{(1+\overline{R})^2}=\frac{1}{(1+\overline{R})^2}$$

$$(\Gamma_a-\frac{\overline{R}}{1+\overline{R}})^2+\Gamma_b{}^2=(\frac{1}{1+\overline{R}})^2 \tag{5-13}$$

由式（5-12）得：

$$\overline{X}+\overline{X}\Gamma_a{}^2-2\overline{X}\Gamma_a+\overline{X}\Gamma_b{}^2=2\Gamma_b$$

$$1+\Gamma_a{}^2-2\Gamma_a+\Gamma_b{}^2=\frac{2}{\overline{X}}\Gamma_b$$

$$\Gamma_a{}^2-2\Gamma_a+1+\Gamma_b{}^2-\frac{2}{\overline{X}}\Gamma_b=0$$

$$\Gamma_a{}^2-2\Gamma_a+1+\Gamma_b{}^2-\frac{2}{\overline{X}}\Gamma_b+\frac{1}{\overline{X}^2}-\frac{1}{\overline{X}^2}=0$$

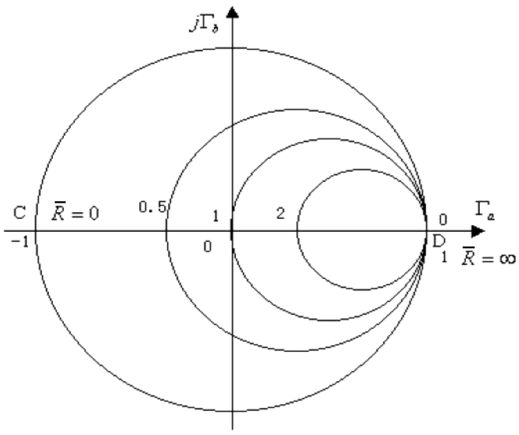
$$(\Gamma_a-1)^2+(\Gamma_b-\frac{1}{\overline{X}})^2=\frac{1}{\overline{X}^2} \tag{5-14}$$

显然，式（5-13）和（5-14）两个方程在$\Gamma_a+j\,\Gamma_b$ 复平面分别是以 $\overline{R}$ 和 $\overline{X}$ 为参数的圆方程。

式（5-13）是以归一化电阻 $\overline{R}$ 为参量的圆族。这个圆族称为等电阻圆族。其圆心为$\Gamma_a=\overline{R}/(\overline{R}+1)$，$\Gamma_b=0$，半径为$1/(\overline{R}+1)$。当$R$由零增加到无限大时，则电阻圆由单位圆缩小到D点。电阻圆的大小随R的变化如图5-2 所示。由图可见，所有的等电阻圆都相切于（$\Gamma_a=1$、$\Gamma_b=0$）点；$\overline{R}=0$ 的圆为单位圆，表明单位圆为纯电抗圆。

R	圆心（$\frac{\overline{R}}{1+\overline{R}}$，0）	半径$\frac{1}{\overline{R}+1}$
0	（0,0）	1
1/2	（$\frac{1}{3}$,0）	$\frac{2}{3}$
1	（$\frac{1}{2}$,0）	$\frac{1}{2}$
2	（$\frac{2}{3}$,0）	$\frac{1}{3}$
∞	（1,0）	0

（a）



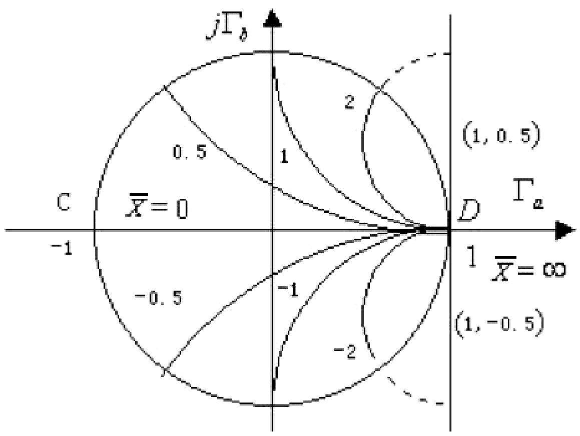
（b）

图5-2

式（5-14）式以归一化电抗$\overline{X}$为参变量的圆族,称为等电抗圆族。其圆心为（Γ_a=1、Γ_b=1/$\overline{X}$）、半径为|1/$\overline{X}$。因|Γ| <1，因此只有在单位圆内的圆才有意义。当|$\overline{X}$|由零增大到无限大时，则圆的半径由无限大减小到零，等电抗圆由直线缩为一点。圆的半径随$\overline{X}$值的变化如图5-3 所示。

$\overline{X}$	圆心（1,$\frac{1}{\overline{X}}$）	半径$\frac{1}{\overline{X}}$
0	（1,±∞）	∞
1/2	（1,±2）	2
1	（1,±1）	1
2	（1,±0.5）	0.5
∞	（1,0）	0

（a）



（b）

图5-3

由图可见，所有的圆相切与（ Γ_a=1、Γ_b=0）点，$\overline{X}$ 为正值（即感性）的电抗圆均在上半平面上，$\overline{X}$ 为负值（即容性）的电抗圆均在下半平面上；$|\overline{X}|$愈大，则圆的半径愈小。当 $\overline{X}=\infty$ 时，则圆缩为一个点（D点）；当 $\overline{X}=0$时，则圆的半径为无限大，圆变成 $\overrightarrow{CD}$ 一条直线，因此 $\overrightarrow{CD}$ 直线是纯电阻的轨迹，即为电压波腹点或电压波节点的轨迹。

将等反射系数圆族、等相位线族、等电阻圆族和等电抗圆族画在同一个复平面上，即得如附图5-4所示的阻抗圆图（电脑计算用图）。工程上的等相位线不画出来，仅在外圆标上电长度和相角的读数。等驻波系数也不画出来，因为实轴 $\overrightarrow{CD}$ 为 $|\overline{X}|=0$ 的轨迹，即是波腹点或波节点的轨迹。波腹点的归一化电阻值为驻波系数，波节点的归一化电阻值为行波系数，因此一个以坐标原点为圆心、$R_{MAX}=\rho$为半径的圆即为等驻波系数圆。

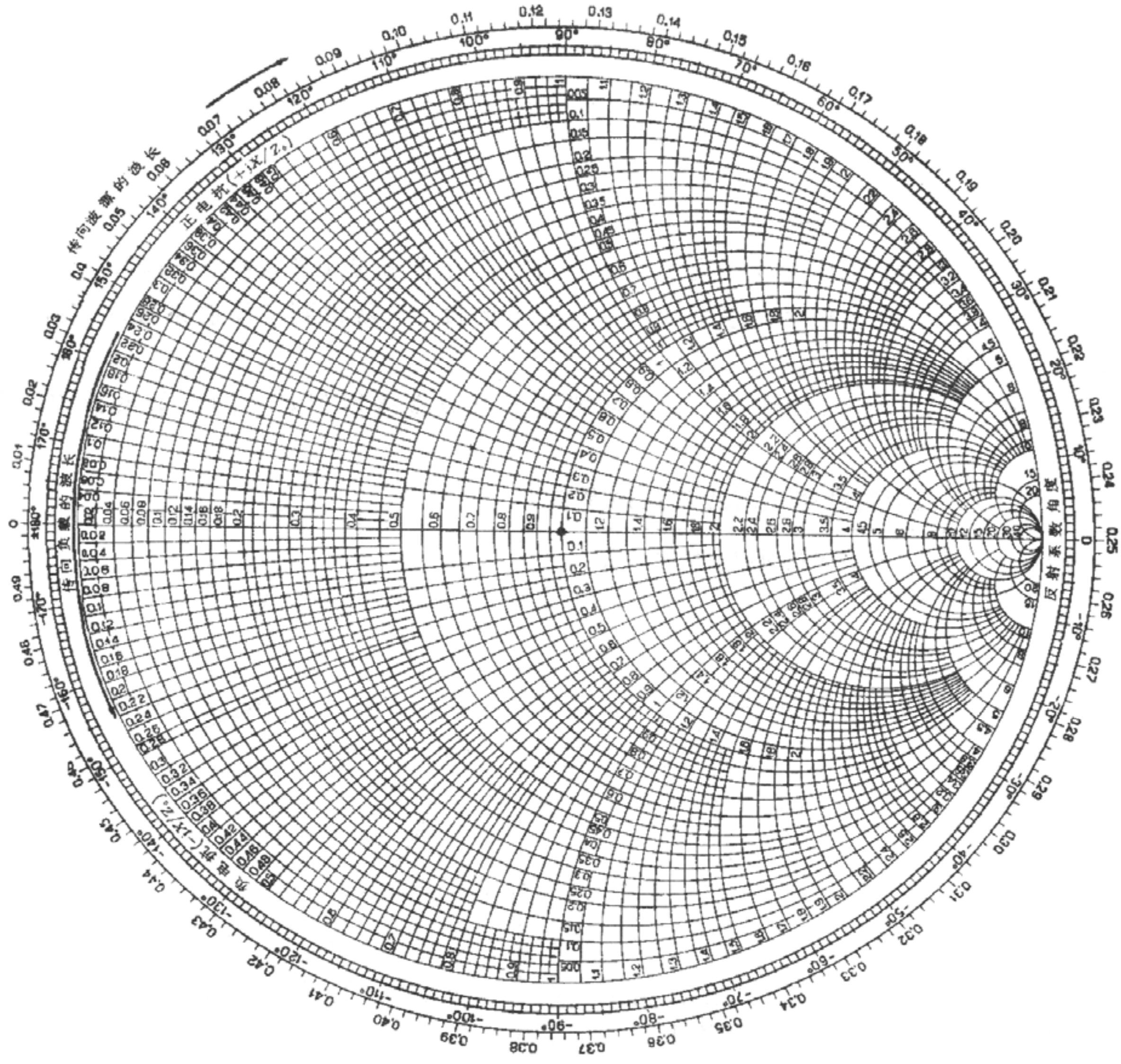


图 5-4 史密斯圆图

由上面的分析可知，阻抗圆图由如下几个特点：

（1）圆图上由三个特殊的点：

开路点（D点）。坐标为（1，0），此时对应于$\overline{R}=\infty$，$|\overline{X}|=\infty$，　$\Gamma=1$，$\rho=\infty$，　$\varphi=0$。

短路点（C点）。坐标为（-1，0），此时对应于$\overline{R}=0$，$|\overline{X}|=0$，$\Gamma=1$，$\rho=\infty$，$\varphi=\pi$。

匹配点（O点）。坐标为（0，0），此时对应于$\overline{R}=1$，$|\overline{X}|=0$，　$\Gamma=0$，$\rho=1$

（2）圆图上由三条特殊的线；圆图上实轴$\overrightarrow{CD}$是$|\overline{X}|=0$ 的轨迹，其中$\overrightarrow{OD}$直线为电压波腹点的轨迹，线上$\overline{R}$的读数即为驻波系数ρ的读数；$\overrightarrow{CD}$直线为电压波节点的轨迹，线上$\overline{R}$的读数即为行波系数的读数；最外面的单位圆为$\overline{R}=0$ 的纯电抗轨迹，即为$\Gamma=1$的全反射系数的轨迹。

（3）圆图上由两个特殊的面；圆图实轴以上的上半平面（即 $\overline{X}>0$ ）是感性阻抗的轨迹；实轴以下的下半平面（即 $\overline{X}<0$）是容性阻抗的轨迹。

（4）圆图上由两个旋转方向；在传输线上由A点向负载方向移动时，则在圆图上由A 点沿等反射系数圆逆时针方向旋转；反之在传输线上由A点向电源方向移动时，则在画图上由A点沿等反射系数圆顺时针方向旋转。

（5）在圆图上任意点可以用四个参量：$\overline{R}$ 、$\overline{X}$ 、$|\Gamma|$及φ来表示。注意$\overline{R}$ 和 $\overline{X}$ 为归一化值，如果要求它的实际值须分别乘以传输线的特性阻抗Z_0。

5.2 导纳圆图

导纳是阻抗的倒数，故归一化导纳为

$$\overline{Y}(z')=\frac{1}{\overline{Z}(z')}=\frac{1-\Gamma(z')}{1+\Gamma(z')}$$

注意式中的Γ（z'）是电压反射系数，如果上式用电流反射系数Γ_I（z'）来表示，因

$$\Gamma_V(z')=-\Gamma_I(z')$$

故有

$$\overline{Y}(z')=\frac{1+\Gamma_I(z')}{1-\Gamma_I(z')} \qquad (5\text{-}15)$$

而

$$\overline{Z}(z')=\frac{1+\Gamma_V(z')}{1-\Gamma_V(z')} \qquad (5\text{-}16)$$

式（5-15）和式（5-16）形式完全相同，表明$\overline{Z}(z')$与Γ_V（z'）组成的阻抗圆图和$\overline{Y}$（z'）和Γ_I（z'）组成的导纳圆图完全相同，因此阻抗圆图就可以作为导纳圆图。两个圆上参量的对应关系如表5-1 所示,导纳圆图如图5-5 所示。

表 **5-1**

阻抗圆图	$\overline{R}$	$+j\overline{X}$	$-j\overline{X}$	$\|\Gamma_V\|$	φ_V
导纳圆图	$\overline{G}$	$+j\overline{B}$	$-j\overline{B}$	$\|\Gamma_I\|$	$\varphi_I=\varphi_V+\pi$

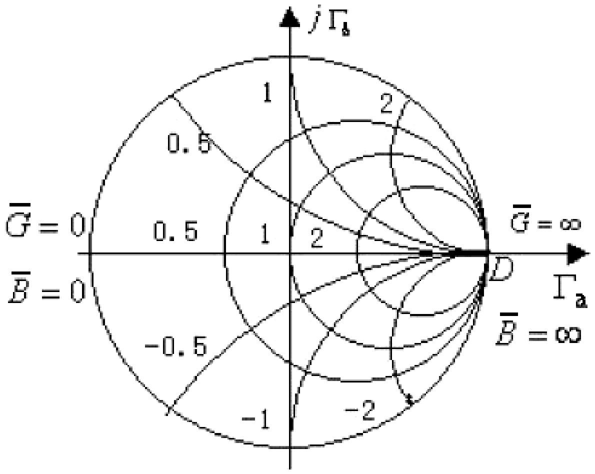


图5-5

但把阻抗圆图作为导纳圆图用时必须注意下列几点：

（1）阻抗圆图的上半面为$+j\overline{X}$平面（ X为正值）,故为感性平面，下半平面为$-j\overline{X}$平面，故为容性平面；而导纳圆图的上半平面为$+j\overline{B}$平面（$\overline{B}$为正值），故为容性平面，下半平面为$-j\overline{B}$平面，故为感性平面。

（2）在阻抗圆图上，$\overrightarrow{OD}$ 直线为电压波腹点的轨迹，$\overrightarrow{OC}$直线为电压波节点的轨迹；而导纳圆图上$\overrightarrow{OD}$直线为电流波腹点（即电压波节点）的轨迹，$\overrightarrow{OC}$直线为电流波节点（即电压波腹点）轨迹。

（3）在阻抗圆图上，D 点为$\overline{R}=\infty$， $\overline{X}=\infty$的开路点，C点为$\overline{R}=0$、$\overline{X}=0$ 的短路点；而导纳圆图上，D点为$\overline{G}=\infty$、$\overline{B}=\infty$的短路点，C点为$\overline{G}=0$、$\overline{B}=0$ 的开路点。

5.3 阻抗圆图的应用举例

阻抗圆图是微波工程设计中的重要工具。利用圆图可以解决下面问题：

1）根据终接负载阻抗计算传输线上的驻波比；

2）根据负载阻抗及线长计算输入端的输入导纳、输入阻抗及输入端的反射系数；

3）根据线上的驻波系数及电压波节点的位置确定负载阻抗；

4）阻抗和导纳的互算等等。

下面举例来说明圆图的使用方法。

【例题1】 已知双线传输线的特性阻抗$Z_0=300\ \Omega$,终接负载阻抗 $Z_L=180+j240\ \Omega$,求终端反射系数Γ_2及离终端第一个电压波腹点至终端距离 l_{max1} 。

解：（1）计算归一化负载阻抗：

$$Z=\frac{Z_L}{Z_0}=\frac{180+j240}{300}=0.6+j0.8$$

在阻抗圆图上找到$\overline{R}$=0.6、$\overline{X}$=0.8 两圆的交点A 点即为$\overline{Z_L}$在圆图上的位置。如图5-6 所示。

（2）确定反射系数的模$|\Gamma_2|$。以O 点为圆心、$\overrightarrow{OA}$为半径画一个等反射系数圆，交实轴于B点，B点所对应的归一化电阻$\overline{R}$=3，即为驻波系数ρ=3，则

$$|\Gamma_2| = \frac{\rho-1}{\rho+1} = \frac{3-1}{3+1} = 0.5$$

（3）计算Γ_2 的相角φ_2。圆图上$\overrightarrow{OA}$和实轴$\overrightarrow{OD}$的夹角即为反射系数的相角φ_2，可直接读得φ_2=90，也可以用电长度来计算，延长$\overrightarrow{OA}$至E 点，读得波源方向的电长度为0.125，实轴$\overrightarrow{OD}$的电长度读数为0.25，故φ_2对应的电长度为

$$\Delta\theta = 0.25 - 0.125 = 0.125$$

由（5-9）得：

$$\varphi_2 = \Delta\theta \times 4\pi = 90°$$

因此，终端的电压反射系数Γ_2 =0.5 $e j^{90°}$

（4）确定第一个电压波腹点离终端的距离l_{max1}。由A点沿ρ=3 的圆顺时针方向转到与实轴$\overrightarrow{OD}$相交于B 点，即为波腹点的位置，故B 点的电长度与A 电长度的差值乘以λ，即为l_{max1}，故l_{max1}=0.125 λ。

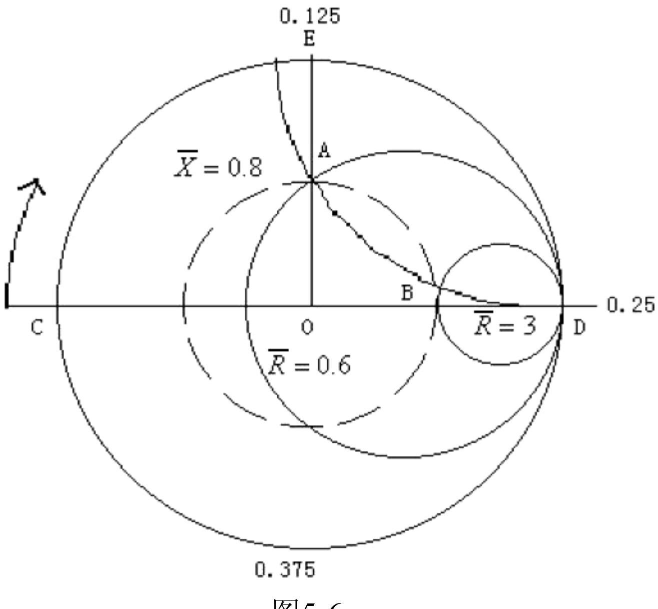


图5-6

6 传输线阻抗匹配

6.1 阻抗匹配概念

阻抗匹配是传输线理论中的重要概念。在由信号源、传输线及负载组成的微波系统中，如果传输线与负载不匹配，传输线上将形成驻波。有了驻波一方面是传输线功率容量降低，

另一方面会增加传输线的衰减。如果信号源和传输线不匹配，既会影响信号源的频率和输出功率的稳定性，又使信号源不能给出最大功率、负载又不能得到全部的入射功率。因此传输线一定要匹配。匹配有两种：一种是阻抗匹配，使传输线两端所接的阻抗等于传输线的特性阻抗，从而使线上没有反射波；另一种匹配是功耗匹配，使信号源给出最大功率。

设信号源的内阻抗为$Z_g = R_g + jX_g$，传输线的输入阻抗为$Z_{in} = R_{in} + jX_{in}$，如图6-1所示。则信号源给出功率为：

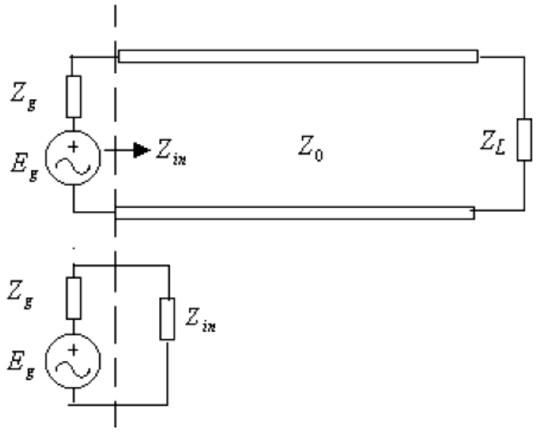


图6-1

$$\mathrm{P} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{U_{in} I^*{}_{in}\right\} = \frac{1}{2}\left|U_{in}\right|^2 \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{Z_{in}}\right\} \tag{6-1}$$

因为

$$U_{in} = \frac{Z_{in}}{Z_{in} + Z_g} E_g \tag{6-2}$$

$$\mathrm{P} = \frac{1}{2}\left|\frac{Z_{in}}{Z_{in} + Z_g}\right|^2 \left|E_g\right|^2 \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{Z_{in}}\right\} = \frac{1}{2}\left|E_g\right|^2 \frac{R_{in}{}^2 + X_{in}{}^2}{(R_g + R_{in})^2 + (X_g + X_{in})^2} \mathrm{Re}\left(\frac{R_{in} - jX_{in}}{R_{in}{}^2 + X_{in}{}^2}\right)$$

$$\mathrm{P} = \frac{1}{2}\frac{\left|E_g\right|^2 R_{in}}{(R_g + R_{in})^2 + (X_g + X_{in})^2} \tag{6-3}$$

下面分别就两种匹配加以讨论。

6.1.1 共轭匹配

要使信号源给出最大功率，达到共轭匹配，必须要求传输线的输入阻抗和信号源的内阻抗互为共轭值。

即：

$$Z_g = Z_{in}{}^*$$

即　$R_g = R_{in}$，　$X_g = -X_{in}$

在满足以上共轭匹配条件下，信号源给出的最大功率为

$$P_{max}= \frac{1}{2}|E_g|^2\frac{1}{4R_g} \quad （6-4）$$

6.1.2 阻抗匹配

阻抗匹配是指传输线的两端阻抗与传输线的特性阻抗相等，使线上电压与电流为行波。

为了要传输线的始端与信号源阻抗匹配，由于传输线的特性阻抗为实数，故要求信号源的内阻抗也为实数，即$R_s=Z_0$ ，$X_s=0$，此时传输线的始端无反射波，这种信号源称为匹配信号源。当始端接了这种信号源，即使终端负载不等于特性阻抗，负载产生的反射波也会被匹配信号源吸收，不会再产生新的反射。

实际上始端很难满足$Z_s=R_s$的条件。一般在信号源与传输线之间用阻抗匹配网络来抵消反射波。

同理，终端也不可能满足$Z_L=Z_0$ 的条件，必须用阻抗匹配网络使传输线和负载阻抗匹配。下面讨论阻抗匹配的方法。

6.2 阻抗匹配方法

阻抗匹配的方法是在传输线和终端之间加一匹配网络，如图6-2 所示。要求这个匹配网络由电抗元件构成：损耗尽可能的小，而且通过调节可以对各种终端负载匹配。匹配的原理是产生一种新的反射波来抵消原来的反射波。

最常用的匹配网络有λ/4变换器、直接匹配器、阶梯阻抗变换和渐变线变换器。这里只介绍前面两种。

6.2.1 阻抗变换器

阻抗变换器是由一段长度为λ/4的传输线组成，如图6-3所示为Z_{01}、长度为λ/ 4的传输线终端接纯电阻R_L时，则由式（3-12），该传输线的输入阻抗为

$$Z_{in}=Z_{01}\frac{Z_L+jZ_{01}\tan\beta l}{Z_{01}+jZ_L\tan\beta l} \quad （6-5）$$

因：

$$\beta l=\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{\lambda}{4}=\frac{\pi}{2}$$

则：

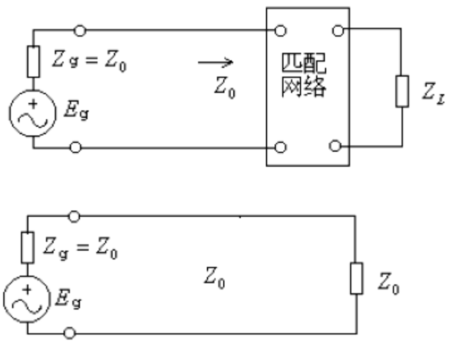


图6-2

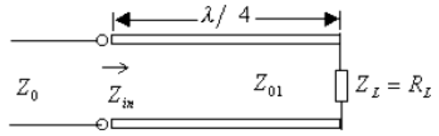


图6-3

$$Z_{in} = \frac{Z_{01}^2}{R_L} \qquad (6\text{-}6)$$

为了使 $Z_{in} = Z_0$ 实现匹配，必须使

$$Z_{01} = \sqrt{Z_0 R_L} \qquad (6\text{-}7)$$

上式表明，如果Z_0和R_L已给定，只要中间加一段长度为λ/4，特性阻抗为 $Z_{01} = \sqrt{Z_0 R_L}$ 传输线，就能使特性阻抗为Z_0的传输线和负载电阻R_L匹配。

由于无耗线的特性阻抗是个实数，故原则上λ/4阻抗变换器只能对纯电阻负载进行匹配。如负载阻抗不是纯电阻，仍然可以采用λ/4线实现匹配，但λ/4线必须接在电压波腹或波节处，因为此处的阻抗为纯电阻。

若λ/4线在电压波腹点接入，由式（4-19）：

$$\overline{R}_{\max} = \frac{\overline{U}_{\max}}{\overline{I}_{\min}} = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|} = \rho$$

λ/4线的特性阻抗为

$$Z_{01}\sqrt{Z_0 \rho Z_0} = \sqrt{\rho} Z_0 \qquad (6\text{-}8)$$

若λ/4 线的电压波节点接入，由式（4-20）得λ/4线的特性阻抗为：

$$Z_{01} = \sqrt{Z_0 \frac{Z_0}{\rho}} = \frac{Z_0}{\sqrt{\rho}} \qquad (6\text{-}9)$$

单节λ/4线的主要缺点是频带窄，原则上只能对一个频率匹配。为了加宽频带可采用多级λ/4阻抗变换器或渐变式阻抗变换器。

6.2.2 支节匹配器

支节匹配器的原理是利用在传输线上并接或串接终端短路的支节线，产生新的反射波抵消原来的反射波，从而达到匹配。

支节匹配可分单字节、双字节和三字节匹配，但由于它们的匹配原理相同，这里只介绍单字节匹配。

单字节匹配的原理如图6-4所示。当归一化导纳Y_L≠1时，在离负载导纳适当的距离d处，并接一个长度为l、终端短路（或开路）的短截线，构成单字节匹配器，从而使主传输达到匹配。它的匹配原理可用导纳圆图来说明。

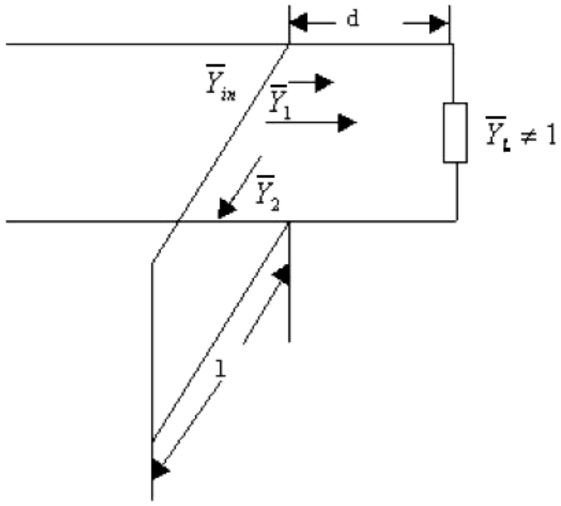


图6-4

为了使传输匹配，必有

$$\overline{Y}_{in}=1 \tag{6-10}$$

由图6-4 看出

$$\overline{Y}_{in}=\overline{Y}_1+\overline{Y}_2 \tag{6-11}$$

其中Y_2是短路（或开路）短截线的归一化输入导纳，它只能提供一个纯电纳，即

$$\overline{Y}_2=j\overline{B} \tag{6-12}$$

将式（6-10）和式（6-12）代入式（6-11），得到

$$\overline{Y}_1=1-\overline{Y}_2=1-j\overline{B}$$

因此，要使$Y_{in}=1$　，　必有

$$\overline{Y}_1=1-\overline{Y}_2=1-j\overline{B} \tag{6-13}$$

即$\overline{Y_1}$的轨迹一定位于$G=1$的圆上。利用导纳圆图很易求得$\overline{Y_1}$的值，只要将导纳圆图上的$\overline{Y}_L$位置沿等驻波系数圆顺时针转到和$\overline{G}=1$的圆相交，其交点即为$Y_1=1-j\overline{B}$。由$\overline{Y}_L$转到$\overline{Y_1}$，所转过的电长度即为d/λ。为了要抵消电纳$-j\overline{B}$，只要调节并接短截线的长度l，使它能提供一个$+jB$的输入电纳，从而满足$\overline{Y_{IN}}=1$，达到匹配。因此调节离负载的距离d的目的是使$\overline{Y_1}$落在$\overline{G}=1$的圆上，调节短截线的长度l的目的是提供一个电纳，抵消$\overline{Y_1}$中的电纳。由此

可见接入位置d和短截线长度l可由导纳圆图求得。还可根据式（3-13）导得d和l的解析式为

$$\begin{cases} d = \dfrac{\lambda}{2\pi}\arctan\sqrt{\dfrac{Z_L}{Z_0}} \\ l = \dfrac{\lambda}{2\pi}\arctan(\dfrac{\sqrt{Z_L Z_0}}{Z_L - Z_0}) \end{cases}$$

短路时

式中Z_L为实数。

这种单字节匹配器，一组d和l只能对一个$\overline{Y}_L$值进行匹配，当$\overline{Y}_L$值改变时，必须重新改变d和l。对于双线传输线调节很方便，但对于同轴线的d调节不太容易实现。解决的办法是采用双字节匹配，这样离负载的距离d_1和短截线的距离d可以固定，只要改变两短截线的长度实现对各种负载导纳的调配。但双字节匹配器存在不能匹配的死区，克服这个缺点可以采用三支节或四支节进行匹配，这部分内容将在微波元件一章中讨论。

【例题2】 已知双导线的特性阻抗Z_L=*200* Ω，负载阻抗Z_L=*660* Ω，用单字节匹配器进行匹配，求接入支节的位置d和支节长度l。

解：解题过程如图6-5所示。

（1）计算归一化负载阻抗和归一化负载导纳：

$$\overline{Z}_L = \frac{Z_L}{Z_0} = \frac{660}{200} = 3.3 + j0$$

由圆图上找到$\overline{Z}_L$≈3.3的位置A点，由A点转过180°得B点，B点即为归一化负载导纳的位置读得$\overline{Y}_L = 0.3 + j\,0$。

（2）求$\overline{Y_1}$及d。由B点沿ρ=3.3等驻波系数圆顺时针方向转到与$\overline{G} = 1$的圆相交与E和E’点，该两点即为$\overline{Y_1}$位置，读得$\overline{Y_1} = 1 \pm j1.3$。B点E点和E’点对应的电长度分别为0、0.171 或0.329。因此,支节线接入位置d=0.171λ或0.329λ。

（3）求支节线长度l。为了抵消$\overline{Y_1}$中±j1.3 电纳，短截线的输入归一化电纳应为$\overline{Y_2} = \pm j1.3$。若采用终端短路的短截线，由导纳圆图上的短路点$D$沿$\rho$=∞圆顺时针转到$\overline{Y_2} = \mp j1.3$的F和F’点。D、F 和F’点相应电长度分别为0.25、0.354 和0.146。故支节线的长度为：

l=（0.354-0.25）λ
=0.104 λ

或:

l=（0.5-0.104）λ
=0.396 λ

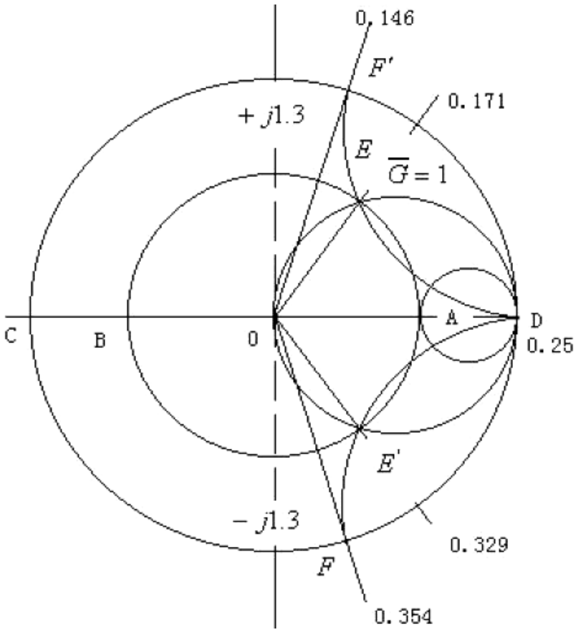


图6-5

附录1，单位电容的公式推导

设：内外导体单位长度的电量为+ρ₁及-ρ₁，则介质内电场强度为：

$$E = E_r = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon r}$$

电场沿半径方向，由 E_r 可以求出两导体电压

$$V = \int_{r1}^{r2} E_r dr = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon}\int_{r1}^{r2}\frac{dr}{r} = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

故，单位长度的电容为

$$C = \frac{\rho}{V} = \frac{\rho_l}{V} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\frac{r_2}{r_1}} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\frac{D}{d}}$$